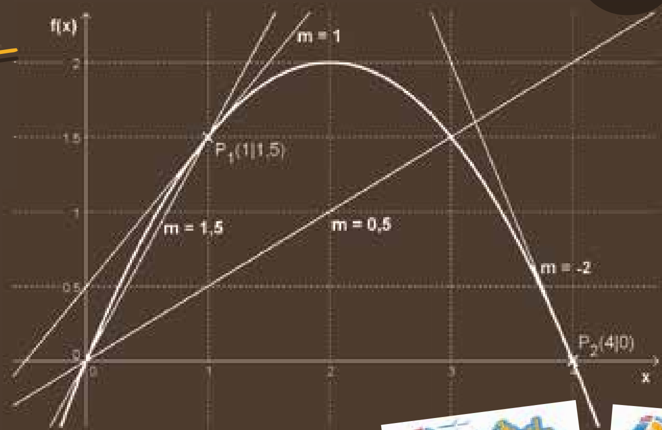
StrandMathe

Meer fürs Denken

Lösungen für Übungshefte



Oberstufe

Inhaltsverzeichnis


StrandMathe
Meer fürs Denken
Das Übungsheft
Oberstufe
Teil 1

Lösungen

Klasse 11,1 - Oberthema A

Funktionen

Arbeitsblatt 01: Abhängigkeiten entstehen

Aufgabe 1

a) Zu Beginn des Tages befinden sich 10 Besucher am Strand. Bis um 4 Uhr nachts haben alle den Strand verlassen. Um 6 Uhr sind bereits die ersten Besucher wieder da. Bis um 10 Uhr steigt die Anzahl der Besucher. Zwischen 10 und 12 verändert sich die Anzahl nicht. Das Maximum ist um 16 Uhr erreicht, dort waren 50 Personen am Strand. Bis zum nächsten Abend verlassen die Besucher nach und nach den Strand, bis um 24 wieder 10 Besucher übrig bleiben.

b) Sowohl zwischen 6 und 8 Uhr, als auch zwischen 12 und 14 Uhr steigt die Besucheranzahl um 15.

c)

Tageszeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Besucher	10	5	0	5	20	25	25	40	50	35	20	15	10

Aufgabe 2

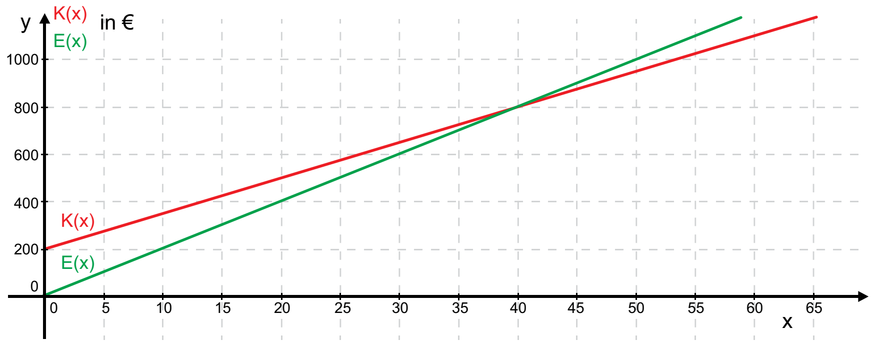
a) $E(x) = 20x$

b)

Anzahl x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	50
Kosten K(x)	200	215	230	245	260	275	290	305	320	335	350	365	380	950

Anzahl x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	50
Einnahmen E(x)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	1000

c)



d) Im Graphen ist zu erkennen, dass ein Schnittpunkt vorliegt und Die Einnahmen ab diesem Punkt größer sind als die Kosten. Dieser Punkt liegt bei einer verkauften Anzahl von 40. Der Gewinn ist die Differenz zwischen Einnahmen und Kosten:

$$G(x) = E(x) - (K(x)) = 20x - (15x + 200) = 5x - 200$$

Arbeitsblatt 02: Der Funktionsbegriff

Aufgabe 1

a) $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$ b) $D = \mathbb{R} < \{\sqrt{2}\}$ c) $D = \mathbb{R}$ d) $D = \mathbb{R}$

Aufgabe 2

a) $W = [\approx 1; \approx 192]$ b) $W = [\approx -3{,}8; \approx 3{,}8]$ c) $W = [0; \approx 12{,}8]$

Aufgabe 3

$f(x) = 0{,}5x^2$	$-5 < x < 0$	$W_f = [0; 12{,}5]$
$h(x) = 3x$	$0 < x < 5$	$W_h = [0; 15]$
$g(x) = 15$	$5 < x < 10$	$W_g = [15]$

Arbeitsblatt 03: Lineare Funktionen

Aufgabe 1

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2

$$y = \frac{3}{2}x - 5$$

Aufgabe 3

Definition Steigung:

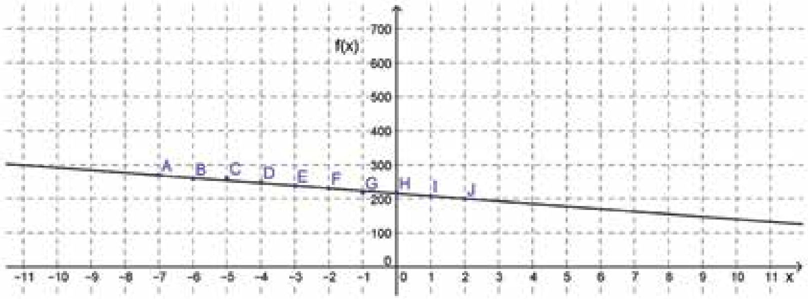
$$m = \tan(\alpha) = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Daraus folgt:

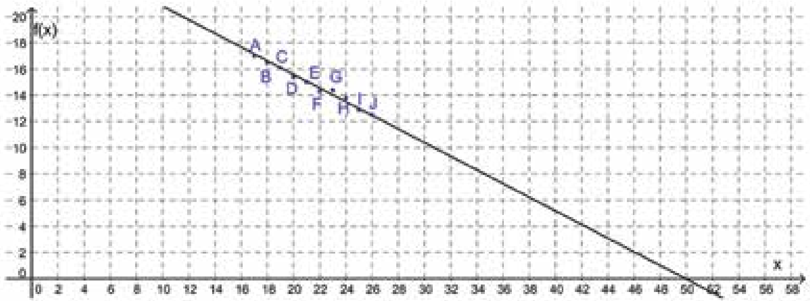
α = arctan (m) = arctan (-2,4) = -67,38°

Arbeitsblatt 04: Lineare Regression

Aufgabe 1



f(x) = -7,87x + 215,56



f(x) = -0,49x + 25,31

Aufgabe 2

f(x) = 1.87x + 7.43 (inklusive Messfehlern)

g(x) = 2.2x + 5 (ohne Messfehler)

g(x) ist wesentlich genauer in der Beschreibung der beobachteten Werte.

Aufgabe 3

y = - 0,5 x + 7

Arbeitsblatt 05: Funktionsscharen

Aufgabe 1

1. Parameter b und c gleich 1:

Für a = 3 ist die Funktion 0.

2. Parameter a und c gleich 1:

3. Parameter a und b gleich 1:

Für c = 3 existiert keine Funktion.

Arbeitsblatt 06: Funktionsscharen

Aufgabe 1

a) $f(x) = 5(x+2) - 4 \quad x < -2$

$f(x) = -5(x+2) - 4 \quad x \geq -2$

b) $f(x) = -12{,}5(x - 7{,}12) + 17 \quad x < 7{,}12$

$f(x) = 12{,}5(x - 7.12) + 17 \quad x \geq 7{,}12$

c) $f(x) = 2{,}2(17 - x) - 2{,}7 \quad x < -17$

$f(x) = -2{,}2(17 - x) - 2{,}7 \quad x \geq -17$

Aufgabe 2

f(x) = -5 |x - 4| + 7

Aufgabe 3

f(x) = 0,5 |x - 5| -2

f(x) = -0,5 (x - 5) -2 x < 5

f(x) = 0,5 (x - 5) -2 x ≥ 5

Arbeitsblatt 07: Potenzfunktionen

Aufgabe 1

$f(x) = \frac{a}{x+5} + 12$ mit beliebigem a

Aufgabe 2

$f(x) = b(x - 5)^3 - 7$ mit beliebigem b

Aufgabe 3

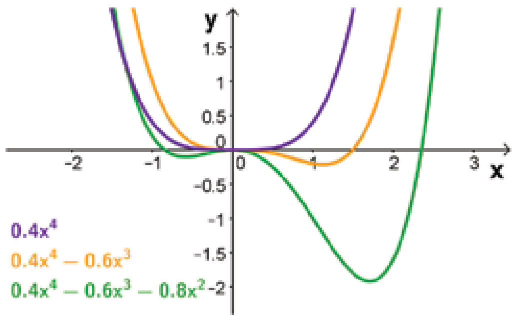
Punktsymmetrisch und Sattelpunkt -> kubischer Verlauf
Punktsymmetrisch und Polstelle -> Hyperbel
Achsensymmetrisch und Scheitelpunkt -> Parabel
Gespiegelte Potenzfunktion an y = x, nur im positiven Bereich -> Wurzelfunktion

Arbeitsblatt 08: Ganzrationale Funktionen Zusammenhang

Aufgabe 1

	Symmetrie	Grenzverhalten	Nullstellen	Extremstellen	Schnittpunkt
a)	keine	+/+	4	3	2
b)	keine	+/+	6	5	0
c)	keine	-/+	7	6	-8

Aufgabe 2



die Terme niedrigeren Grades führen zur Ausprägung der Extremstellen; im Bereich zwischen -1 und 1 überwiegen ihre Verläufe, danach bestimmt die Funktion höchsten Gerades den Verlauf. Je weniger Terme vorliegen, desto eher ähnelt sie hier also einer Funktion 4. Grades.

Aufgabe 3

$f(x) = -x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 - 3$

Arbeitsblatt 09: p-q-Formel und Mitternachtsformel

Aufgabe 1

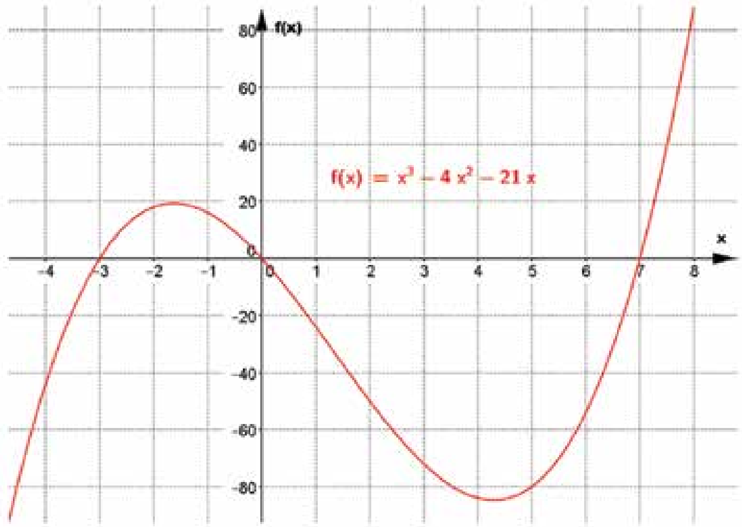
$x_{0;1} = -1$ und $x_{0;2} = 3$

Aufgabe 2

a) keine Lösung, weil Diskriminante negativ ist
b) eine Lösung (doppelte Nullstelle) bei x = -2, weil Diskriminante gleich Null
c) zwei Lösungen (eigentlich drei). Ausklammern eines x bringt $x_{0;1} = 0$. Da die Diskriminante positiv ist, gibt es zwei weitere Lösungen $x_{0;2} = -1$ sowie $x_{0;3} = 3$

Aufgabe 3

$f(x) = x \cdot (x - (-3)) \cdot (x - 7) = x^3 - 4x^2 - 21x$



Aufgabe 4

Die p-q-Formel kann nur dann angewendet werden, wenn die Gleichung folgende Form besitzt: $x^2 + px + q = 0$
Auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht eine Null und auf der anderen Seite steht eine 1 vor dem x^2. Diese 1 wird aber in der Mathematik häufig weggelassen, aber jeder weiß, dass sie dort eigentlich steht.
Die Mitternachtsformel ist schwieriger als die p-q-Formel, aber dafür muss man die Gleichung vor der Anwendung nicht mehr bearbeiten. Es können alle Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ verwendet werden.

Arbeitsblatt 10: Polynomdivision

Aufgabe 1

$x_{0;1} = 2$, $x_{0;2} = 1$ und $x_{0;3} = 3$

$$
\begin{array}{ll}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3 & \mid\ x^3 : x = x^2 \\
-(x^3 - 2x^2) & \mid\ (x - 2) \cdot x^2 \\
\hline
\quad -4x^2 + 11x & \mid\ -4x^2 : x = 4x \\
\quad -(-4x^2 + 8x) & \mid\ (x - 2)(-4x) \\
\hline
\qquad 3x - 6 & \mid\ 3x : x = 3 \\
\qquad -(3x - 6) & \mid\ (x - 2) \cdot 3 \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 2

$x_{0;1} = -1$ und $x_{0;2} = 1$ keine weiteren Nullstellen, weil das Ergebnis eine nach oben geöffnete Parabel ist, die über der x-Achse ihren Scheitelpunkt besitzt.

$$
\begin{array}{ll}
(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x - 5) : (x^2 - 1) = x^2 - 4x + 5 & \\
x^4 \quad - x^2 & \cdot (x^2 - 1) \\
\hline
-4x^3 + 5x^2 + 4x - 5 & \\
-4x^3 \quad + 4x & \cdot (x^2 - 1) \\
\hline
\quad 5x^2 \quad - 5 & \\
\quad 5x^2 \quad - 5 & \cdot (x^2 - 1) \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Arbeitsblatt 11: Substitutionsverfahren

Aufgabe 1

$x_{0;1} \approx 1{,}4142$ *und* $x_{0;2} \approx -1{,}4142$ *und* $x_{0;3} \approx 1{,}7321$ *und* $x_{0;4} \approx -1{,}7321$

Aufgabe 2

$x_{0;1} = 0$ *und* $x_{0;2} = 3$ *und* $x_{0;3} = -3$ *und* $x_{0;4} = 2$ *und* $x_{0;5} = -2$

Arbeitsblatt 12: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1

a) $x_{0,1} = 0$; $x_{0,2} = 1{,}5$

b) $x_{0,1/2} = 0$ (doppelt) ; $x_{0,3/4} = \pm 3$

c) $x_{0,1/2} = \pm\sqrt{3}$; $x_{0,3/4} = \pm\sqrt{2}$ (Substitution und p-q-Formel)

d) erste Nullstelle raten: $x_{0,1} = -1$, → Polynomdivision ergibt: $(x + 1)(x^2 - 2x - 3)$
p-q-Formel: $x_{0,2} = 3$ und $x_{0,3} = -1$ (→ doppelt)

e) erste Nullstelle raten: $x_{0,1} = -2$, → Polynomdivision ergibt: $(x + 2)(x^2 - 8x + 12)$
p-q-Formel: $x_{0,2} = 6$ und $x_{0,3} = 2$

Aufgabe 2

$f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 3)$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$; erste Nullestelle „raten" und dann Polynomdivision

Aufgabe 3

zunächst kann man eine 2 ausklammern → $0 = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-3	-10	24
$x_{0,1} = 2$		1	-1	-12

$0 = (x - 2)(x^2 - x - 12)$ → p-q-Formel

$x_{0,1} = 2$, $x_{0,2} = 4$, $x_{0,3} = -3$

Klasse 11,1 - Oberthema B

Differenzialrechnung

Arbeitsblatt 01: Änderungsrate

Aufgabe 1

$$m = \frac{f(2{,}01\,s) - f(2\,s)}{2{,}01\,s - 2\,s} = \frac{16{,}16\,m - 16\,m}{0{,}01\,s} = 16\,{}^{m}/_{s}$$

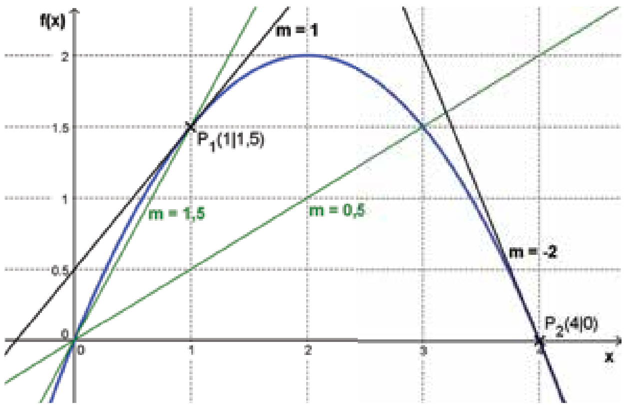
$$m = \frac{f(6{,}01\,s) - f(6\,s)}{6{,}01\,s - 6\,s} = \frac{144{,}48\,m - 144\,m}{0{,}01\,s} = 48\,{}^{m}/_{s}$$

$$m = \frac{f(6\,s) - f(2\,s)}{6\,s - 2\,s} = \frac{144\,m - 16\,m}{4\,s} = 32\,{}^{m}/_{s}$$

$$100\,m = 4\,{}^{m}/_{s^2} \cdot t^2 \;\rightarrow\; t^2 = 25\,s^2 \;\rightarrow\; t = 5\,s$$

$$m = \frac{f(5{,}01\,s) - f(5\,s)}{5{,}01\,s - 5\,s} = \frac{100{,}4\,m - 10\,m}{0{,}01\,s} = 40\,{}^{m}/_{s}$$

Aufgabe 2



$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1{,}5 - 0}{1} = 1{,}5$$

$$m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{1{,}5 - 0}{3} = 0{,}5$$

$$m = \frac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{1{,}51 - 1{,}5}{0{,}01} = 1$$

$$m = \frac{f(4{,}01) - f(4)}{4{,}01 - 4} = \frac{-0{,}02 - 0}{0{,}01} = -2$$

Aufgabe 3

Die Beschleunigung gibt an, wie sich die Geschwindigkeit des Motorrads ändert. Sie ist also die Änderungsrate der Geschwindigkeit oder eben die *„Änderungsrate der Änderungsrate“* des Weges. Schaut man sich die momentanen Geschwindigkeiten nach jeder vollen Sekunde an, sieht man, dass die Geschwindigkeit immer um 8 m/s zunimmt. Die Änderungsrate der Geschwindigkeit und somit die Beschleunigung entspricht daher 8 m/s pro Sekunde.

Aufgabe 4 und Aufgabe 5:

Erklärungen siehe Video

Arbeitsblatt 02: Ableitung mit Differenzenquotient

Aufgabe 1

$$f'(-2) = \frac{f(-1{,}99) - f(-2)}{-1{,}99 - (-2)} = \frac{0{,}04 - 0}{0{,}01} = 4$$

x-Methode:

$$f'(-2) = \frac{(-x^2 + 4) - (-(-2)^2 + 4)}{x - (-2)} = \frac{-x^2 + 4 - (-4 + 4)}{x + 2} = \frac{-x^2 + 4}{x + 2}$$

Polynomdivision: $(-x^2 + 4) : (x + 2) = -x + 2$

Einsetzen der Stelle $x_0 = -2$ führt zu $f'(-2) = -x + 2 = -(-2) + 2 = 4$

Beide Ansätze liefern das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 2

$x_{\text{nicht diff.bar}} = \{-3; 1; 2; 3; 4, 5\}$

Aufgabe 3

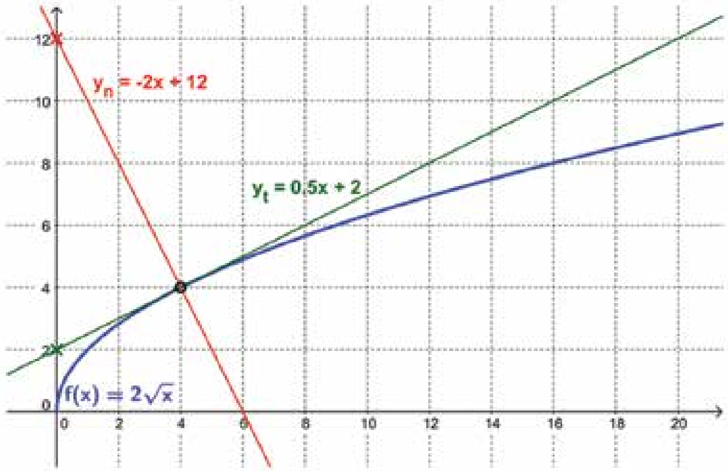
$$f'(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{x_0 + h - x_0} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 = 3x_0^2$$

Diese Vorgehensweise liefert eine allgemeine Lösung, mit der an jeder beliebigen Stelle x_0 in der gegebenen Funktion die Steigung bestimmt werden kann.

Arbeitsblatt 03: Tangente und Normale

Aufgabe 1



Aufgabe 2

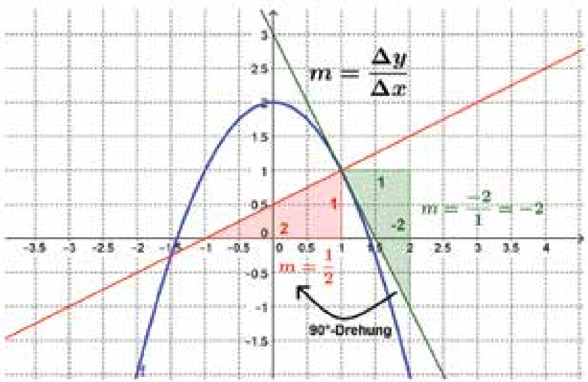
$$y_{tP} = 4(x-2) + 1 = 4x - 7$$

$$y_{nP} = -\frac{1}{4}(x-2) + 1 = -\frac{1}{4}x + 1{,}5$$

$$y_{tQ} = -1(x-1) = -x + 1$$

$$y_{nQ} = 1(x-1) = x - 1$$

Aufgabe 3

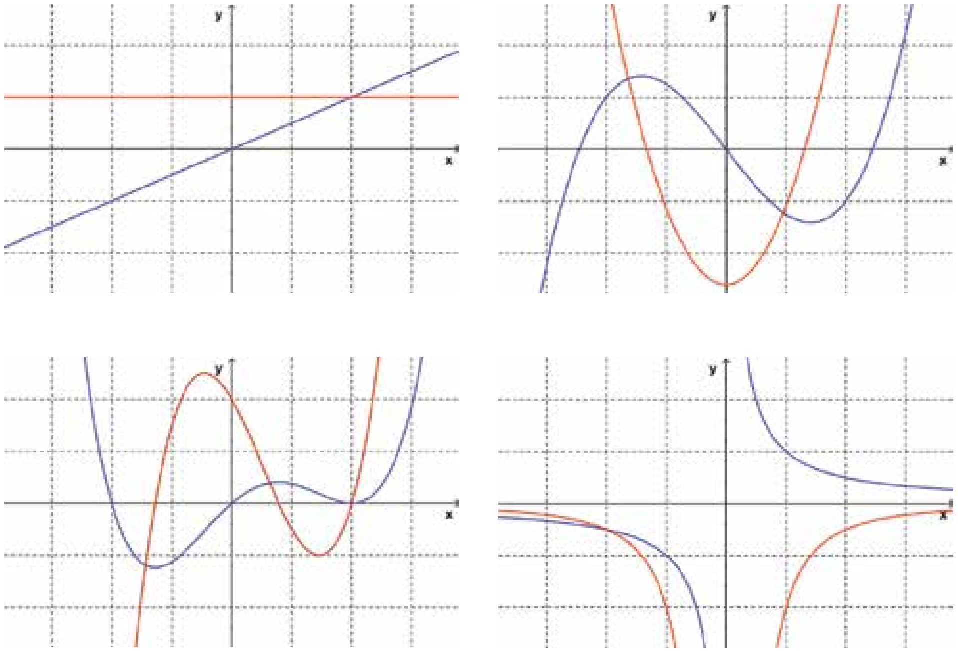


Eine Normale steht orthogonal, also im rechten Winkel, zur Tangente. Dies entspricht einer 90°-Drehung. Zeichnet man ein Steigungsdreieck ein, erkennt man, dass sich auch diese um 90° mitdreht, wodurch die Zuordnung von Δy und Δx getauscht werden. Es liegt daher der Kehrwert der Steigung vor. Aufgrund der Richtungsänderung (von Fallen nach Steigen) ändert sich gleichzeitig das Vorzeichen der Steigung.

Arbeitsblatt 04: Ableitungsfunktion

Aufgabe 1

Ableitungsfunktion jeweils in rot



Aufgabe 2

$$\frac{(x^2 - x - 1) - (x_0^2 - x_0 - 1)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x - x_0^2 + x_0}{x - x_0} = \frac{(x^2 - x_0^2) - (x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{(x - x_0)(x + x_0) - (x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 - 1$$

mit $x \to x_0$: $f'(x_0) = 2x_0 - 1$

$f'(-2) = -5$ $\quad f'(-0{,}5) = -2$ $\quad f'(0) = -1$ $\quad f'(1) = 1$

$f'(3) = 5$

Aufgabe 3

$f'(x_0) = x_0$

a) $f'(x_0) = -4 \;\rightarrow\; -4 = x_0$

b) $f'(x_0) = f(x_0) \;\rightarrow\; x_0 = \frac{1}{2}x_0^2 - 3 \;\rightarrow\; 0 = x_0^2 - 2x_0 - 6$

pq-Formel: $x_{01,2} = 1 \pm \sqrt{7}$

c) Steigung der Geraden/Tangente beträgt $m = 2$, somit ist $x_0 = 2$ da $f'(x_0) = x_0$

Außerdem: $f(2) = 0.5 \cdot 2^2 - 2 - 1 = -1$

Daher: $-1 = g(2) = 2 \cdot 2 + b \;\rightarrow\; -5 = b$

Arbeitsblatt 05: Potenzfunktionen ableiten

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = x^3$ c) $f'(x) = 6x^2$

d) $f'(x) = -2x^{-3}$ e) $f'(x) = -\frac{12}{x^7}$ f) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

g) $f'(x) = 9\sqrt{x}$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$

Aufgabe 2

$$f'(x) = 5kx^4 \;\rightarrow\; f'(2) = 4 = 5k \cdot 2^4 = 80k \;\rightarrow\; k = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$$

Aufgabe 3

mit Potenzregel: $f'(x) = 4x^3$

$$f'(x_0) = \frac{(x_0 + h)^4 - x_0^4}{x_0 + h - x_0} = \frac{x_0^4 + 4x_0^3h + 6x_0^2h^2 + 4x_0h^3 + h^4 - x_0^4}{h} = 4x_0^3 + 6x_0^2h + 4x_0h^2 + h^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} 4x_0^3 + 6x_0^2h + 4x_0h^2 + h^3 = 4x_0^3$$

Potenzregel wird durch Differenzenquotient bestätigt. Der rot markierte Term ist immer derjenige, bei dem sich ein h rauskürzt und somit am Ende bei $\lim_{h\to 0}$ übrig bleibt.

Arbeitsblatt 06: Ableitungsregeln und Höhere Ableitungen

Aufgabe 1

a) $f(x) = -x^6$ $f'(x) = -6x^5$ $f''(x) = -30x^4$ $f'''(x) = -120x^3$

b) $f(x) = -x^3 + 4x$ $f'(x) = -3x^2 + 4$ $f''(x) = -6x$

c) $f(x) = \frac{4+x^5}{x^3} = \frac{4}{x^3} + \frac{x^5}{x^3} = \frac{4}{x^3} + x^2$ $f'(x) = -\frac{12}{x^4} + 2x$

d) $f(x) = -\frac{1}{7}x^7 + x^{-2}$ $f'(x) = -x^6 - 2x^{-3}$ $f''(x) = -6x^5 + 6x^{-4}$

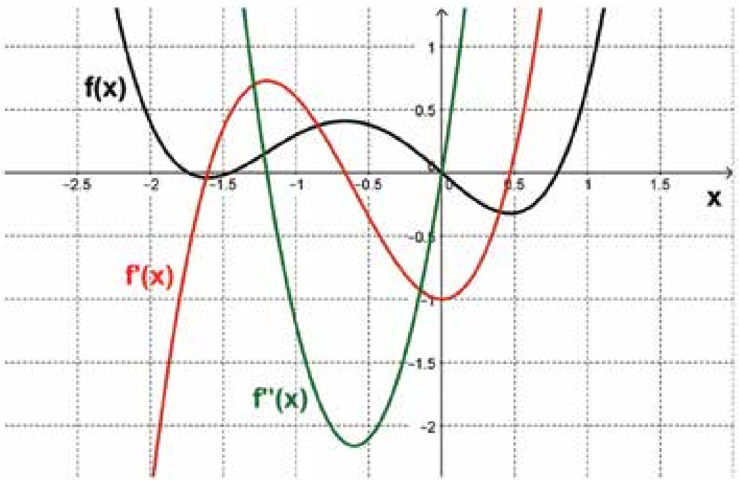
$f'''(x) = -30x^4 - 24x^{-5}$ $f^{(IV)}(x) = -120x^3 + 120x^{-6}$

$f^{(V)}(x) = -360x^2 - 720x^{-7}$

d) $f(x) = \sqrt{x^3} + 2x^3$ $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 6x^2$ $f''(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} + 12x$

$f'''(x) = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 12$

Aufgabe 2



Aufgabe 3

$f''(x) = 12x^2$ $f'(x) = 4x^3$ $f(x) = x^4$

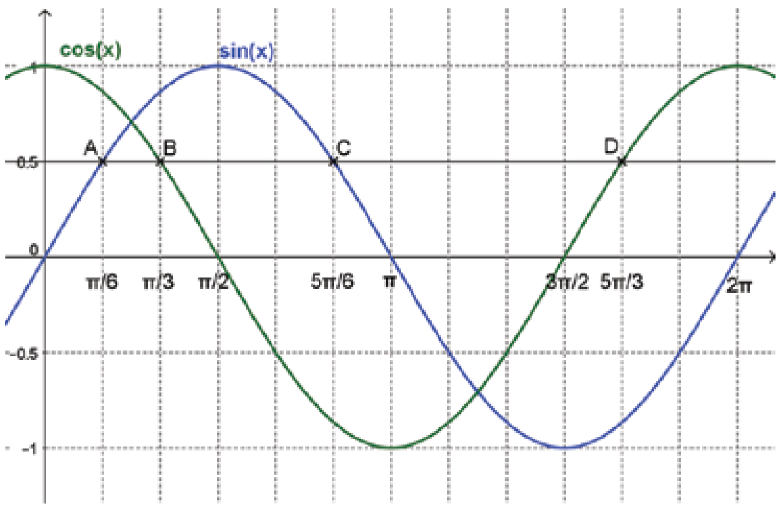
Arbeitsblatt 07: Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1

a) $\sin\alpha = 0{,}6 \qquad \alpha = \{36{,}9°;\ 143{,}1°\}$

$\cos\alpha = 0{,}6 \qquad \alpha = \{53{,}1°;\ 306{,}9°\}$

b)



Aufgabe 2

grün: $f(x) = 0{,}5\sin(2x) + 1$ und $f(x) = -0{,}5\cos\left(2x + \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$

blau: $g(x) = \sin(0{,}5(x - \pi))$ und $g(x) = -\cos(0{,}5x)$

rot: $h(x) = 3\sin(x - \frac{\pi}{4})$ und $h(x) = -3\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Aufgabe 3

$$f(t) = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin\left(314{,}16\frac{1}{s}(t - 0{,}005\,s)\right) + 0$$

$$a = \frac{9\,\text{cm}}{2} = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{3000}\text{min}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{50}s} = 2\pi \cdot 50s = 314{,}16\frac{1}{s}$$

$$t_0 = \frac{0{,}02}{4}s = 0{,}005\,s$$

Arbeitsblatt 08: Trigonometrische Funktionen ableiten

Aufgabe 1

a) $f'(x) = -2 \cdot \cos(x) \qquad f''(x) = 2 \cdot \sin(x)$
b) $f'(x) = 4 - 0{,}5 \cdot \sin(x) \qquad f''(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x)$
c) $f'(x) = \sin(x) + \frac{6}{x^4} \qquad f''(x) = \cos(x) - \frac{24}{x^5}$

Aufgabe 2

$f'(x) = -2\sin(x) \qquad 0 = -2\sin(x_0) \quad \rightarrow \quad \sin(x_0) = 0 \qquad x_0 = \{k \cdot \pi\}$

folglich $x_0 = \{0;\ \pi;\ 2\pi\}$

Aufgabe 3

$f'(x) = \cos(x) + \sin(x) \quad \rightarrow \quad \text{maximal} \quad \rightarrow \quad \sin(x) = \cos(x)$

Gilt für $x = 45°$ bzw. $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = 225°$ bzw. $x = \frac{5\pi}{4}$

$$f'_{max}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

Arbeitsblatt 09: Schnittwinkel von Graphen

Aufgabe 1

a) $f_1(x) = -0{,}5x + 4$ und $f_2(x) = 3$
Schnittstelle: $-0{,}5x_s + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad x_s = 2$
Schnittpunkt: $S(2|3)$
Schnittwinkel: $m_{f1} = -0{,}5 \qquad m_{f2} = 0 \qquad \gamma = -26{,}6° \qquad \delta = 0°$
$\varphi = |-26{,}6° - 0°| = 26{,}6°$

b) $f_1(x) = -4x$ und $f_2(x) = 0{,}25x - 7{,}5$
Schnittstelle: $-4x_s = 0{,}25x_s - 7{,}5 \quad \rightarrow \quad x_s = 1{,}76$
Schnittpunkt: $y_s = -4 \cdot (1{,}76) = -7{,}04 \qquad S(1{,}76| -7{,}04)$
Schnittwinkel: $m_{f1} = -4 \qquad m_{f2} = 0{,}25 \qquad \gamma = -76{,}0° \qquad \delta = 14{,}0°$
$\varphi = |-76{,}0° - 14{,}0°| = 90°$ oder: $m_{f1} \cdot m_{f2} = -1$, daher orthogonal

c) $f_1(x) = -x^2 + 9$ und $f_2(x) = 3x + 2$

Schnittstelle: $-x_s^2 + 9 = 3x_s + 2 \rightarrow 0 = x_s^2 + 3x_s - 7 \rightarrow$ pq – Formel

$x_{s1} = 1{,}54$ und $x_{s2} = -4{,}54$

Schnittpunkt: $y_{s1} = 6{,}62$ und $y_{s2} = -11{,}62$

$S_1(1{,}54|6{,}62)$ und $S(-4{,}54| -11{,}62)$

Schnittwinkel: $f_1{}'(x) = -2x$ und $f_2{}'(x) = 3$

für S_1 $m_{f1,1} = -3{,}08$ $m_{f2,1} = 3$ $\gamma = -72{,}0°$ $\delta = 71{,}6°$

$\varphi_1 = 180° - |-72{,}0° - 71{,}6°| = 36{,}4°$

für S_2 $m_{f1,2} = 9{,}08$ $m_{f2,1} = 3$ $\gamma = 83{,}7°$ $\delta = 71{,}6°$

$\varphi_2 = |83{,}7° - 71{,}6°| = 12{,}1°$

Aufgabe 2

$f(x) = g(x)$

$-0{,}003x_s^2 + 50 = -0{,}35x_s + 50$

$0 = -0{,}003x_s^2 + 0{,}35x_s \rightarrow 0 = x_s^2 - 116{,}67x_{s0} \rightarrow 0 = x_s(x_s - 116{,}67)$

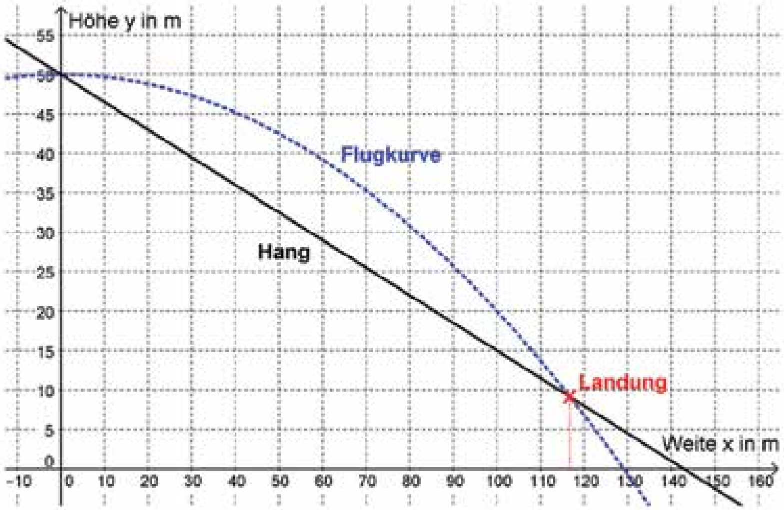
$x_{s1} = 0$und $x_{s2} = 116{,}67 \rightarrow$ Landung

$f'(x) = -0{,}006x$ und $g'(x) = -0{,}35$

$f'(116{,}67) = -0{,}006 \cdot 116{,}67 = -0{,}7$

$\gamma = \tan^{-1}(-0{,}7) = -35{,}0°$ $\delta = \tan^{-1}(-0{,}35) = -19{,}3°$

$\varphi = |-35{,}0° - (-19{,}3°)| = 15{,}7°$



Aufgabe 3

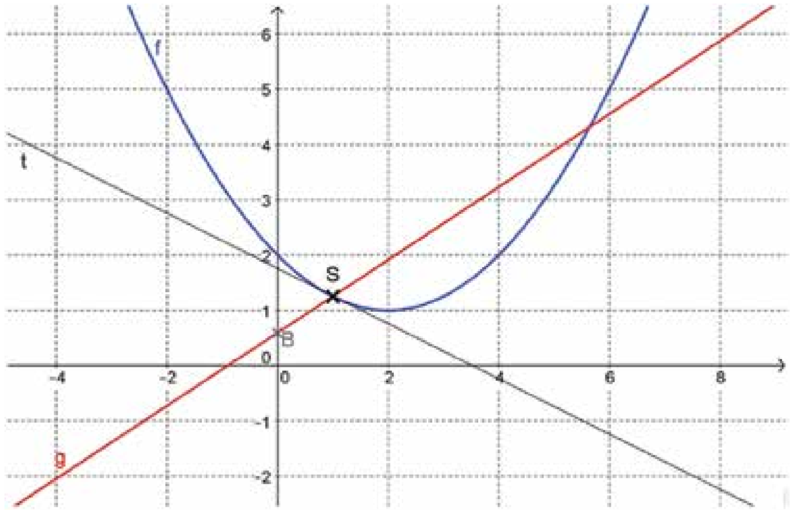
$f(x_s = 1) = \frac{1}{4}(1)^2 - 1 + 2 = \frac{5}{4}$ $S(1|\frac{5}{4})$

$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 \rightarrow f'(x_s = 1) = -0{,}5$

$\varphi = |\gamma - \delta| = 60°$ mit $\gamma = \tan^{-1}(-0{,}5) = -26{,}6°$ ergibt sich für $\delta = 60° - 26{,}6° = 33{,}4°$

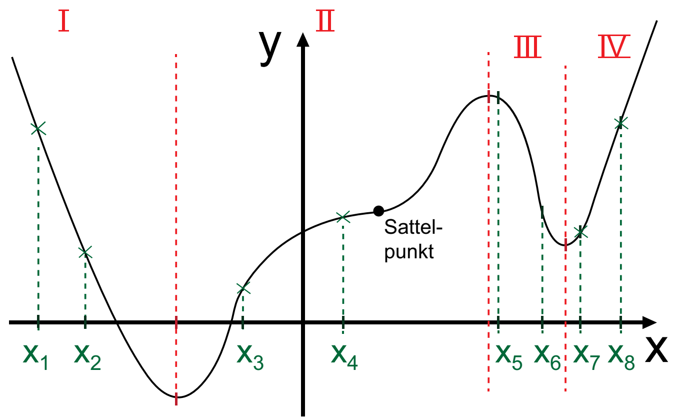
$g'(x_s = 1) = \tan(33{,}4°) = 0{,}66$

Geradengleichung: $g(x) = 0{,}66(x - 1) + \frac{5}{4} = 0{,}66x - 0{,}59$



Arbeitsblatt 01: Änderungsrate

Aufgabe 1



I.	monoton fallend (streng), da	$x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$
II.	monoton steigend (nicht streng, da Sattelpunkt), da	$x_3 < x_4$ und $f(x_3) < f(x_4)$
III.	monoton fallend (streng), da	$x_5 < x_6$ und $f(x_5) > f(x_6)$
IV.	monoton steigend (streng), da	$x_7 < x_8$ und $f(x_7) < f(x_8)$

Aufgabe 2

Steigungswechsel jeweils bei horizontalen Tangenten/Hoch- und Tiefpunkten, daher zunächst Ableitung bzw. ihre Nullstellen bestimmen

$f'(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$x_{E1} = 1$ (geraten)

Polynomdivision: $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6$

pq-Formel: $x_{E2,3} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} \rightarrow x_{E2} = -2$ und $x_{E3} = -3$

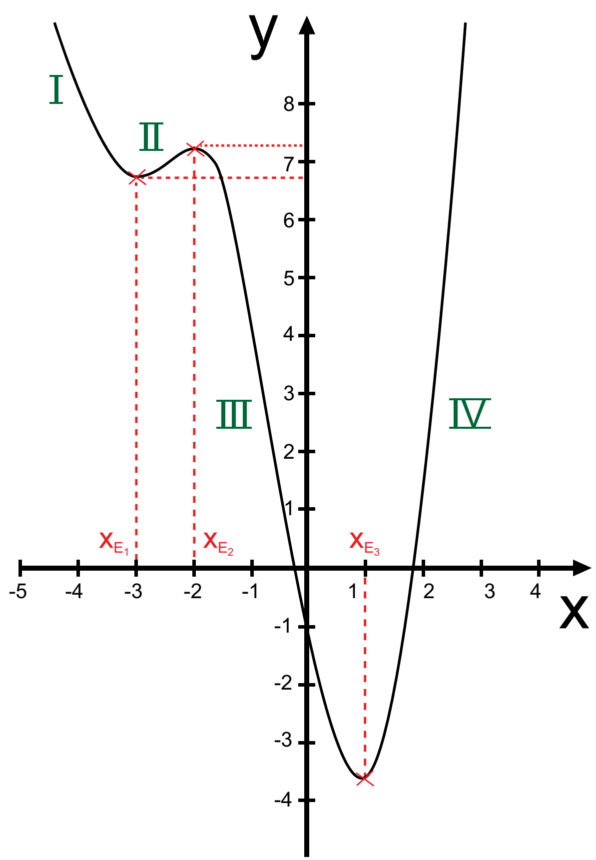
$$f(x_{E1}) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3{,}9$$

$$f(x_{E2}) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 7{,}3$$

$$f(x_{E3}) = \frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) = 6{,}75$$

Wähle in jedem Intervall von einem Extrempunkt zum nächsten beliebige Stellen und berechne den Funktionswert, um den Monotoniesatz anzuwenden.
Beispielhaft:

	Intervall I			Intervall II			Intervall III			Intervall IV		
x	-5	<	-4	-2,8	<	-2,3	-1	<	0,8	1,5	<	2
f(x)	32,1	>	10,7	6,8	<	7,2	5,4	>	-3,7	-2,1	<	4,7
	monoton fallend			monoton steigend			monoton fallend			monoton steigend		

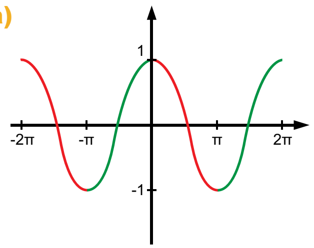


Oftmals ist es leichter und schneller Monotonie am Globalverlauf einer Funktion abzuschätzen ohne das Monotoniekriterium. Dadurch erhält man schon eine ungefähre Vorstellung des Graphen.

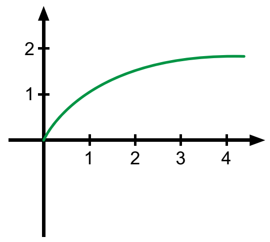
Aufgabe 3

rot ist monoton fallend
grün ist monoton steigend

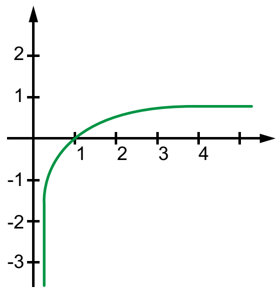
a)



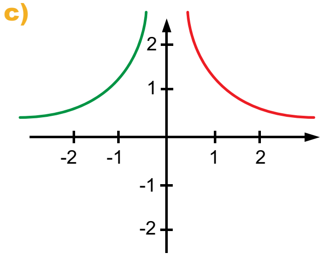
b)



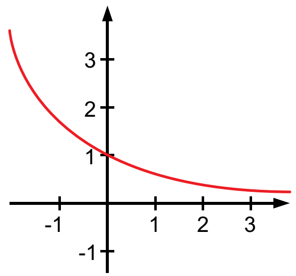
d)



c)



e)



Arbeitsblatt 02: Lokale Extremwerte

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 4x^3 - 2x \qquad 0 = 2x(2x^2 - 1)$

$x_{E1} = 0$ und $x_E^2 = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x_{E2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \qquad 0 = 2x - \frac{1}{x^2}$

$2x_E = \frac{1}{x_E^2} \;\rightarrow\; x_E^3 = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x_E = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79$

c) $f'(x) = -\cos(x) \qquad 0 = -\cos(x) \qquad 0 = \cos(x)$

$x_E = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Aufgabe 2

$f'(x) = x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 39x - 20$ und $f''(x) = 4x^3 + 9x^2 - 34x - 39$

Einsetzen der x_E:

$f'(x_{E1} = -5) = (-5)^4 + 3 \cdot (-5)^3 - 17 \cdot (-5)^2 - 39 \cdot (-5) - 20 = 0$

$f'(x_{E2} = -1) = 0$

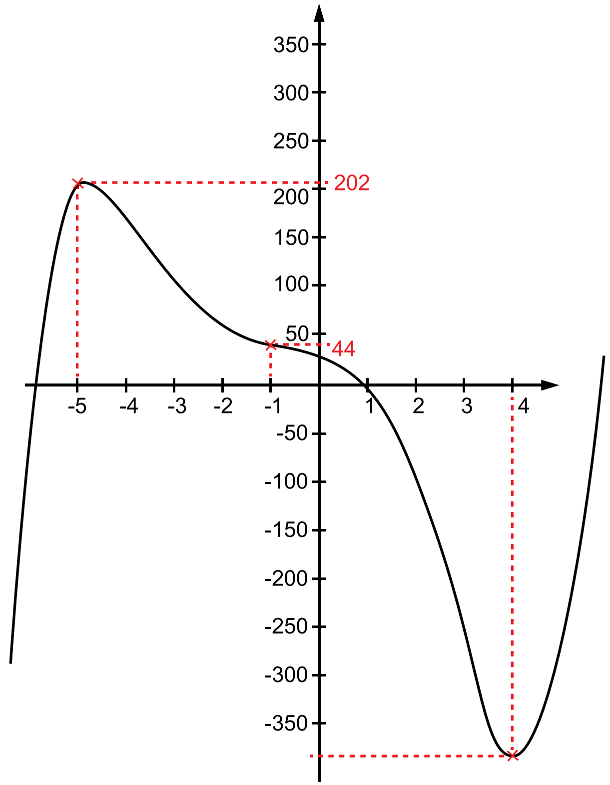
$f'(x_{E3} = 4) = 0$

$f''(x_{E1} = -5) = 4 \cdot (-5)^3 + 9 \cdot (-5)^2 - 34 \cdot (-5) - 39 = -144 < 0$, daher Hochpunkt

$f''(x_{E2} = -1) = 0$

$f''(x_{E3} = 4) = 225 > 0$, daher Tiefpunkt

Da auch die zweite Ableitung an der Extremstelle x_{E2} null ist, ist es plausibel, dass ein Extrempunkt in der ersten Ableitung vorliegt. Dieser Extrempunkt berührt die x-Achse, schneidet sie aber nicht. Es handelt sich folglich um einen Berührpunkt in der ersten Ableitung, wodurch kein Vorzeichenwechsel der Steigung erfolgt. Die Steigung der Funktion f(x) wird also null und nimmt dann wieder mit dem gleichen Vorzeichen betragsmäßig zu (vgl. Monotonie/strenge Monotonie im vorherigen Kapitel; siehe auch nächstes Kapitel „Wende- und Sattelpunkt“).



Aufgabe 3

Für Extremstellen zunächst Ableitung:

$f'(x) = -3x^2 - 2x + a \qquad 0 = x_E^2 + \frac{2}{3}x_E - \frac{a}{3} \quad \rightarrow \quad x_{E1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{a}{3}}$

- mehrere/zwei Extremstellen, wenn die Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) positiv ist, also: $\frac{1}{9} + \frac{a}{3} > 0 \quad \rightarrow \quad a > -\frac{1}{3}$
- eine Extremstelle, wenn die Diskriminante gleich null ist: $\frac{1}{9} + \frac{a}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$
- keine Extremstelle, wenn Diskriminante negativ ist: $\frac{1}{9} + \frac{a}{3} < 0 \quad \rightarrow \quad a < -\frac{1}{3}$

(mit der zweiten Ableitung könnte noch die Art der Extremstelle bestätigt werden. Ist hier aber nicht gefragt.)

Arbeitsblatt 03: Wende- und Sattelpunkt

Aufgabe 1

Konvex	$[-\infty \mid -2{,}5]$		$[-2 \mid -1{,}5]$		$[0 \mid 2]$		$[3 \mid +\infty]$
konkav		$[-2{,}5 \mid -2]$		$[-1{,}5 \mid 0]$		$[2 \mid 3]$	

Wendepunkt	$x_{w1} = -2{,}5$		$x_{w3} = -1{,}5$	$x_{w4} = 0$	$x_{w5} = 2$	
Sattelpunkt		$x_{w2} = -2$				$x_{w6} = 3$

Aufgabe 2

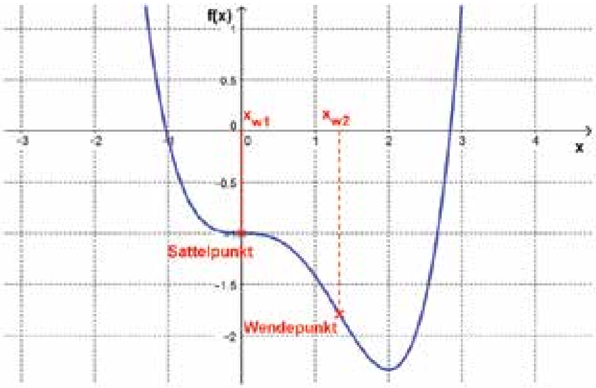
$f'(x) = x^3 - 2x^2 \qquad f''(x) = 3x^2 - 4x \qquad f'''(x) = 6x - 4$

notwendig: $f''(x) = 0 = 3x_w^2 - 4x_w \rightarrow 0 = 3x_w\left(x_w - \frac{4}{3}\right) \rightarrow x_{w1} = 0$ und $x_{w2} = \frac{4}{3}$

hinreichend: $f'''(x_{w1}) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 \neq 0 \qquad f'''(x_{w2}) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 4 \neq 0$

Sattelpunkt: $f'(x_{w1}) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0$ $\qquad x_{w1}$ ist somit Sattelpunkt

$f'(x_{w2}) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = -1{,}19$ $\qquad x_{w2}$ ist somit kein Sattelpunkt



Aufgabe 3

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$

$f'''(x) = 24x + 6a$

Für Wendepunkte notwendig: $f''(x) = 0 = 12x^2 + 6ax + 2b \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{6}b$

$x_{w1,2} = -\frac{1}{4}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{1}{6}b}$

Für zwei Wendepunkte: $\frac{a^2}{16} - \frac{1}{6}b > 0$ wähle z.B. b frei, dann: $a > \sqrt{\frac{8}{3}b}$

außerdem: $24x_w + 6a \neq 0$

Für einen Sattelpunkt muss außerdem gelten:

$f'(x_w) = 0 = 4x_w^3 + 3ax_w^2 + 2bx_w = 4x_w\left(x_w^2 + \frac{3}{4}ax_w + \frac{1}{2}b\right)$

Daher Sattelpunkt z.B. bei $x_w = 0$

Arbeitsblatt 04: Funktionsdiskussion

Aufgabe 1

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1{,}25$

Grenzverhalten:
gerade Potenz, positives Vorzeichen: $f(x \rightarrow -\infty) = +\infty$ und $f(x \rightarrow +\infty) = +\infty$

Schnittpunkt der y-Achse:
$f(x = 0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 1{,}25 = -1{,}25$

Nullstellenbestimmung:
$0 = x_0^4 - 2x_0^2 - 1{,}25$

Substitution: $x_0^2 = z \qquad 0 = z^2 - 2z - 1{,}25$

pq-Formel: $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2{,}25} = 1 \pm 1{,}5 \qquad z_1 = 2{,}5 \qquad z_2 = -0{,}5$

Rücksubstitution: $x_{01,2}^2 = 2{,}5 \qquad x_{01} = +\sqrt{2{,}5} = 1{,}58 \qquad x_{02} = -\sqrt{2{,}5} = -1{,}58$

$x_{03,4} = \sqrt{-0{,}5} = \{\,\}$ negative Wurzel, keine Lösung

Extrempunkte:

$f'(x) = 4x^3 - 4x \qquad 0 = 4x_E^3 - 4x_E \qquad 0 = 4x(x_E^2 - 1) \qquad x_{E1} = 0$

$x_{E2} = 1 \qquad x_{E2} = -1$

f'(x) > 0 oder f'(x) < 0 ??

$f(x_{E1}) = -1{,}25 \qquad f(x_{E2}) = -2{,}25 \qquad f(x_{E3}) = -2{,}25$

$E_1(0 \mid -1{,}25) \qquad E_2(1 \mid -2{,}25) \qquad E_3(-1 \mid -2{,}25)$

Wende- und Sattelpunkt:

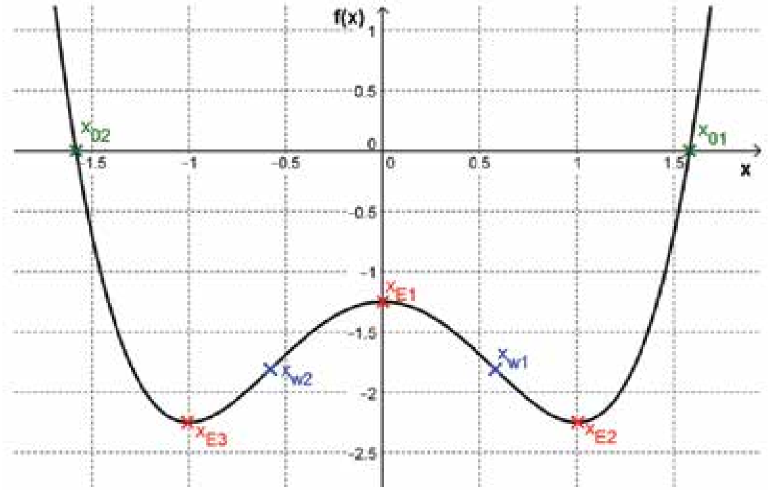
$f''(x) = 12x^2 - 4 \qquad 0 = 12x_w^2 - 4 \qquad \frac{1}{3} = x_w^2$

$x_{w1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}58$ (beide keine Nullstellen in der ersten Ableitung, s.o.)

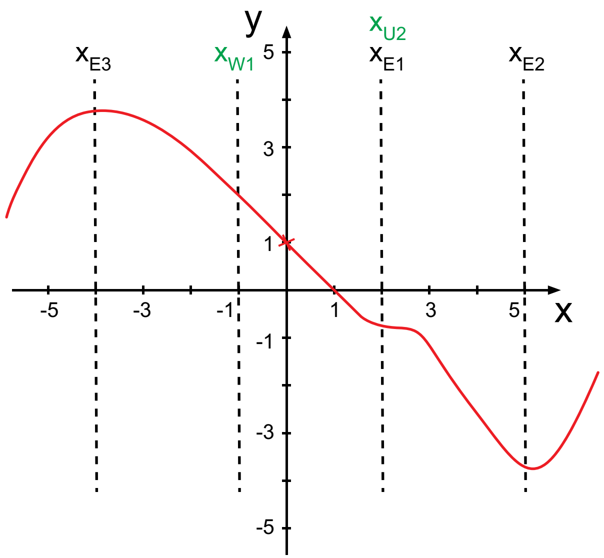
$f(x_{w1}) = \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 1{,}25 = -1{,}8 \qquad f(x_{w2}) = -1{,}8$

$f'''(x) = 24x \qquad f'''(x_w) \neq 0$ für $x_{w1,2}$

$W_1(0{,}58| - 1{,}8) \qquad W_2(-0{,}58| - 1{,}8)$



Aufgabe 2



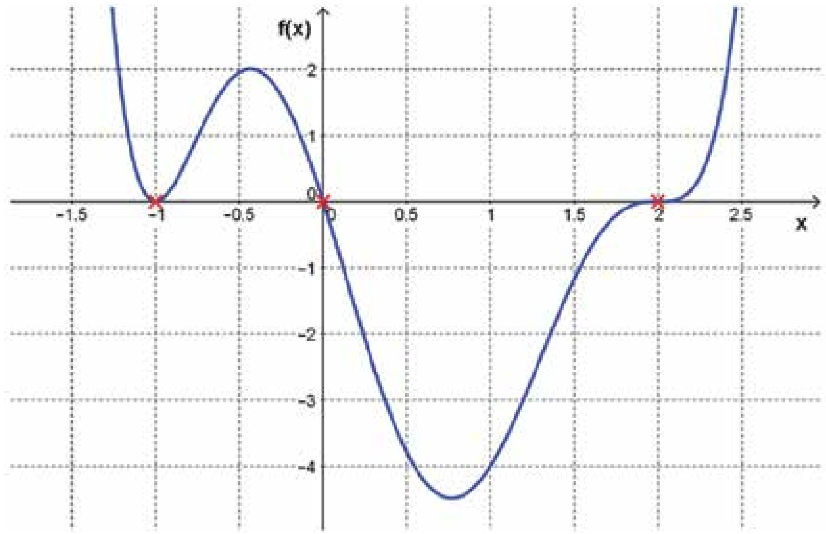
Aufgabe 3

Polynome kann man in sogenannte Linearfaktoren zerlegen, die angeben, wo sich eine Nullstelle befindet, indem man sie in der Form $(x - x_0)$ ausklammert. Es lässt sich dadurch auf den ersten Blick erkennen, dass die gegebene Funktion für $x_0 = \{2; -1; 0\}$ null wird und somit an diesen Stellen Nullstellen aufweist. Zudem gibt die Potenz der Klammer an, um was für eine Nullstelle es sich handelt. Den Term $(x + 1)^2$ kennst du beispielsweise als Teil der Scheitelpunktform, von der du weißt, dass es sich um eine Parabel und folglich um ein Extremum handelt. Genauso gilt dies hier und du kannst von einem Extrempunkt bei $x_0 = -1$ a usgehen. Man bezeichnet ein solches Verhalten auch als doppelte Nullstelle oder Berührpunkt mit der x-Achse. Der Teil $(x - 2)^3$ lässt sich demnach als Sattelstelle auf der x-Achse verstehen.

Die Funktion ist insgesamt vom Grad 6 (3 + 2+ 1) mit einem positiven Koeffizienten. Damit ist der Globalverlauf gegeben: $f(x \to -\infty) = +\infty$ und $f(x \to +\infty) = +\infty$

Wie du bereits weißt, kann eine solche Funktion bis zu fünf Extremstellen aufweisen. Von einer wissen wir, dass sie bei $x_{0/E1} = -1$ ist, die andere Extremstelle ist eine doppelte Extremstelle in Form einer Sattelstelle bei $x_{0/E2} = -2$, sodass noch zwei Extremstellen übrig bleiben. Mit diesen Informationen, die aus der Funktionsgleichung unmittelbar herausgelesen werden können, ergibt sich, dass zwei normale Extremstellen zwangsläufig in dem Bereich zwischen -1 und 2 liegen müssen, um alle genannten Kriterien für den Verlauf zu erfüllen.

Selbst skizzieren, vergleichen mit Plot-Ergebnis.



Arbeitsblatt 05: Extremwertproblem

Aufgabe 1

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = f(x) \cdot x$ $\quad A(x) = (-0{,}5x^2 + 2) \cdot x = -0{,}5x^3 + 2x$
maximaler Flächeninhalt bei Hochpunkt, Bestimmung des Extrempunkts durch Nullstellenbestimmung in der Ableitung

$A'(x) = -1{,}5x^2 + 2 \qquad 0 = -1{,}5x_E^2 + 2 \qquad x_E = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm 1{,}15$

Überprüfung durch zweite Ableitung nicht nötig. Wir können anhand der Skizze davon ausgehen, dass der positive Wert zu Punkt B gehört. Koordinaten: B(1,15 | 1,34)

Aufgabe 2

Minimale Oberfläche bei gegebenem Volumen:

$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad V = \pi r^2 h = 500\text{ cm}^3 \rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$; einsetzen in Oberfläche

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

$$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} \qquad O'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r_{opt} - \frac{1000}{r_{opt}^2} \qquad 0 = 4\pi r_{opt}^3 - 1000 \rightarrow r_{opt} = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}} = 4{,}3\text{ cm} \rightarrow h = 8{,}6\text{ cm}$$

optimales Verhältnis: $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ bzw. Durchmesser zu Höhe ist 1:1

Andere Volumina: $r_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} \qquad h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}\right)^2}$

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}}{\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}\right)^2}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} \cdot \pi\left(\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}\right)^2}{V} = \frac{\frac{2V}{4\pi} \cdot \pi}{V} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3

Q (1,87 ; 3,5)
mit $d^2 = (x-a)^2 + (f(x) - b)^2$ als Zielfunktion für den Abstand.
Das Dreieck muss folgendermaßen eingezeichnet werden: Es geht vom gesuchten Punkt auf der Parabel senkrecht nach oben bis zur y-Höhe 4 und dann horizontal zur y-Achse.

Arbeitsblatt 06: Funktionssynthese

Aufgabe 1

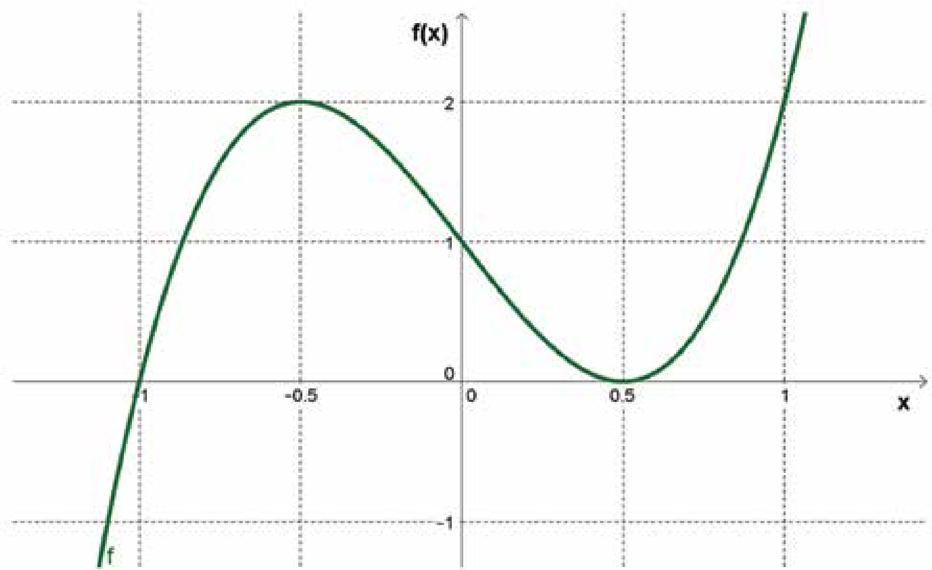
$f''(0) = 0 \qquad f'(0) = -3 \qquad f(-1) = 0 \qquad f'(0{,}5) = 0$

4 Bedingungen benötigen vier Parameter → Polynom dritten Grades

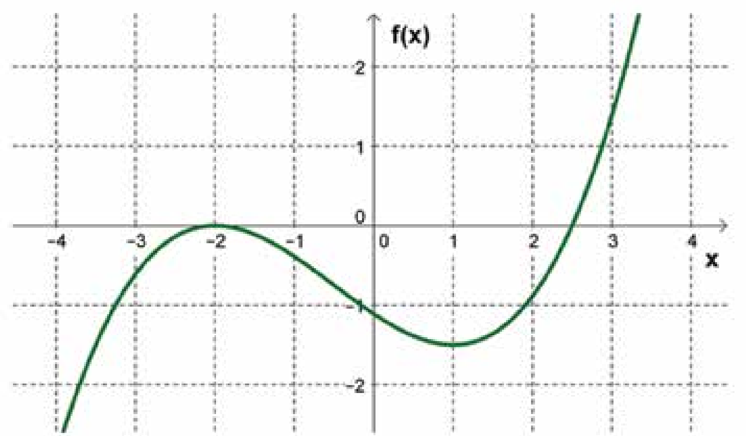
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(0) = 0 = 6a \cdot 0 + 2b \rightarrow \mathbf{b = 0}$$
$$f'(0) = -3 = 3a \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + c \rightarrow \mathbf{c = -3}$$
$$f'(0{,}5) = 0 = 3 \cdot a \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}5 - 3 \rightarrow \mathbf{a = 4}$$
$$f(-1) = 0 = 4 \cdot (-1)^3 + 0 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + d \rightarrow \mathbf{d = 1}$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 1$$



Aufgabe 2



$f(-2) = 0 \qquad f'(-2) = 0 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) > 0$

$f(-2) = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{0 = -8a + 4b - 2c + d}$

$f'(-2) = 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{0 = 12a - 4b + c}$

$f'(1) = 3a \cdot (1)^2 + 2b \cdot (1) + c = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{0 = 3a + 2b + c}$

$f''(1) = 6a \cdot 1 + 2b > 0 \;\rightarrow$ z. B.: $\mathbf{6a + 2b = 1}$

$a = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}b \;\rightarrow\; 0 = \frac{1}{2} - 1b + 2b + c \;\rightarrow\; c = -b - \frac{1}{2}$

$\rightarrow\; 0 = 12\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}b\right) - 4b + \left(-b - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 9b \;\rightarrow\; \mathbf{b = \frac{1}{6}} \;\rightarrow\; \mathbf{a = \frac{1}{9}}$

$\rightarrow\; \mathbf{c = -\frac{2}{3}} \;\rightarrow\; \mathbf{d = -\frac{10}{9}}$

Aufgabe 3

a) Funktion 3. Grades → 4 Parameter maximal;
Extrempunkt 1: f(1) = 4 f´(1) = 0
Extrempunkt 2: f(-2) = 5 f´(-2) = 0
Auf dem ersten Blick okay, weil genug Informationen vorliegen, aber nicht möglich, weil Tiefpunkt nicht höher liegen kann, als Hochpunkt !

b) Funktion 2. Grades → 3 Parameter maximal;
aber: kein Hochpunkt bei f(5) = -2 möglich, wenn Nullstellen vorhanden
nicht möglich!

c) Funktion 4. Grades → 5 Parameter maximal;
Sattelpunkt: f(0) = 4 f´(0) = 0 f´´(0) = 0
Nullstelle: f(2) = 0
Hochpunkt: f´(3) = 0 f´´(3) < 0
6 Bedingungen, nicht möglich (auch wegen Globalverlauf)!

Klasse 11,1 - Oberthema D

Folgen, Reihen und Grenzwerte

Arbeitsblatt 01: Arithmetische Folgen

Aufgabe 1

a) $a_1 = 1,5$ $a_2 = 0,75$ $a_3 = 0$ $a_4 = -0,75$ $a_5 = -1,5$

b) $a_1 = 1,91$ $a_2 = 2,07$ $a_3 = 2,23$ $a_4 = 2,39$ $a_5 = 2,55$

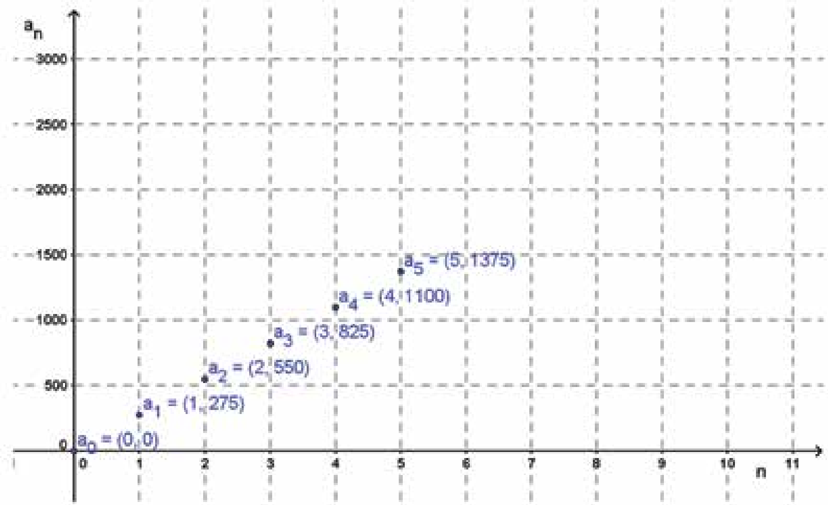
c) $a_1 = \frac{51}{28}$ $a_2 = \frac{39}{28}$ $a_3 = \frac{27}{28}$ $a_4 = \frac{15}{28}$ $a_5 = \frac{3}{28}$

Aufgabe 2

a) $a_n = -2 + n \cdot 2,8$ b) $a_n = 7 - n \cdot \frac{16}{3}$ c) $a_n = -4,5 + n \cdot 2$

Aufgabe 3

$a_n = 0 + n \cdot 275$ $a_n = a_{n-1} + 275$



Arbeitsblatt 02: Geometrische Folgen

Aufgabe 1

a) $a_1 = 2$ $a_2 = 1,5$ $a_3 = 1,125$ $a_4 = 0,84375$ $a_5 \approx 0,6328$

b) $a_1 = 10$ $a_2 = 20$ $a_3 = 40$ $a_4 = 80$ $a_5 = 160$

c) $a_1 = 100$ $a_2 = -300$ $a_3 = 900$ $a_4 = -2700$ $a_5 = 8100$

d) $a_1 = 5$ $a_2 = -2,5$ $a_3 = 1,25$ $a_4 = -0,625$ $a_5 = 0,3125$

Aufgabe 2

a) $a_n = 100 \cdot (-3)^{n-1}$ b) $a_n = 12 \cdot (-0,25)^{n-1}$ c) $a_n = 1,5 \cdot 4^{n-1}$

Aufgabe 3

$a_n = 25000 \cdot 1,025^n$ $a_n = a_{n-1} \cdot 1,025^n$

Aufgabe 4

ca. 7% gehen verloren. $a_n = 93 \cdot 0,93^{n-1}$ bzw. $a_n = 100 \cdot 0,93^n$

Aufgabe 5

arithmetische Folge ergibt sich wie eine lineare Funktion. geometrische eher wie eine Exponentialfunktion

Arbeitsblatt 03: Arithmetische Reihen

Aufgabe 1

Es können 22 Reihen übereinander gestapelt werden.

$n = 22$ $d = -2$ $a_1 = 44$

$s_n = \frac{22}{2}[2 \cdot 44 + (22-1) \cdot -2] = 506$

Insgesamt wurden 506 Dosen verbaut.

Aufgabe 2

$n = 100 \qquad d = 2 \qquad a_1 = 51$

$s_n = \frac{100}{2}[2 \cdot 51 + (100 - 1) \cdot 2] = 15000$

Aufgabe 3

$n = 60 \qquad d = 3 \qquad a_1 = 15$

$s_n = \frac{60}{2}[2 \cdot 15 + (60 - 1) \cdot 3] = 6210$

Zu den 6210 Metern müssen nun noch die 500 Meter eingerechnet werden.
Höhe = 500m + 6210m = 6710m
Er muss das Flugzeug aus einer Mindesthöhe von 6710 Metern verlassen.

Arbeitsblatt 04: Geometrische Reihen

Aufgabe 1

$n = \text{gesucht} \qquad q = 5 \qquad a_1 = 4 \qquad s_n = 3124$

$s_n = 4 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} = 3124 \quad \Leftrightarrow \quad n = 5$

Aufgabe 2

$n = 10 \qquad q = 4 \qquad a_1 = 3$

$s_n = 3 \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = 1048575$

Nach 10 Stunden wüsste also spätestens die ganze Schule Bescheid.

Aufgabe 3

Bei einer Folge wird ein Wert bei einem beliebigen n aus dem n-1 Glied bestimmt. Bei einer Reihe hingegen, werden alle n Werte aufsummiert.

Aufgabe 4

Diese Reihe hat den Grenzwert 1.

Arbeitsblatt 05: Eigenschaften von Folgen

Aufgabe 1

a)

n	1	2	3	4	5
a_n	1	1/2	1/3	1/4	1/5

Die Werte werden immer kleiner, der Abstand zwischen den einzelnen Werten jedoch auch. Daher kann vermutet werden, dass es eine untere Schranke gibt.
$a_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und beschränkt mit der unteren Schranke s = 0.

b)

n	1	2	3	4	5
a_n	3/4	9/8	19/12	33/16	51/20

Die Werte werden immer größer und auch der Abstand zwischen ihnen. Daher wird keine Schranke vorliegen.
$a_n = \frac{2n^2+1}{4n}$ ist monoton steigend und nicht beschränkt.

c)

n	1	2	3	4	5
a_n	3	5/8	7/27	9/64	11/125

Wie auch bei a) werden die Werte immer kleiner, $a_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{n^2}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt mit s = 0.

Aufgabe 2

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{n+1} - \frac{2n+3}{n} = \frac{2n(n+1)+3n-2n(n+1)-3(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$$

Die Differenz ist negativ, das bedeutet dass jeder folgende Wert kleiner wird, daher ist die Folge monoton fallend.

Aufgabe 3

Für die Untersuchung können verschiedene Ansätze gewählt werden, am einfachsten ist es eine Wertetabelle zu erstellen.

n	1	2	3	4	5
a_n	3/2	1/4	1/2	1/8	3/10

Die Werte werden abwechselnd größer bzw. wieder kleiner. Es liegt also keine Monotonie vor. Insgesamt werden die Werte aber immer kleiner, daher ist davon auszugehen, dass eine untere Schranke s = 0 vorliegt.

Arbeitsblatt 06: Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 1

a) $g = 0$ **b)** $g = \infty$ **c)** $g = \frac{3}{2}$

Aufgabe 2

a) ja **b)** $a_n = \infty$ **c)** $a_n = \infty$

Aufgabe 3

$a_n = \frac{2}{n^2}$

Arbeitsblatt 07: Grenzwerte von Reihen

Aufgabe 1

a) Kein Grenzwert $q = 2 > 1$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** $\frac{16}{3}$ **d)** Kein Grenzwert

Aufgabe 2

$s_n = \frac{2}{5} \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\frac{4}{5} - 1}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Aufgabe 3

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Quotientenkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}}\right| = \left|\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^n \cdot 2}\right| = \left|\frac{n}{(n+1)\cdot 2}\right| = \left|\frac{n}{2n+2}\right| = \left|\frac{1}{2+\frac{2}{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2+0}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Das Quotientenkriterium ist erfüllt, die Reihe konvergiert.

Arbeitsblatt 08: Grenzwertsätze

Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{8n} + \frac{1}{8} = 0 + \frac{1}{8}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{\frac{1}{4}\sqrt{n}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 0 + 4$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6} + \frac{2n^2}{6} = \frac{1}{6} + \infty$

Aufgabe 2

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3n+n^2} + \frac{1}{3+n} = 0 + 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{9}{(3+n)^2} + \frac{6}{\frac{9}{n}+3+n} + \frac{4}{\frac{9}{n^2}+\frac{3}{n}+1} = 0 + 0 + 4$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{8n^2-3} = 0$

Aufgabe 3

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}) - \lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt{n}) = \infty - 2\infty = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n) \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(n+2)^2}{\lim_{n\to\infty}(n^3-5)} = \infty \cdot \frac{\infty^2}{\infty^3} = 1$

Arbeitsblatt 09: Grenzwerte bei Funktionen für bestimme X-Werte

Aufgabe 1

a) $f(x) = \frac{x+3}{(x-3)(x-5)}$

x	$x = 2{,}9$	$x_{0;1} = 3$	$x = 3{,}1$
f(x)	$f(x) \approx 28$	$f(x) = \pm\infty$	$f(x) = -32$

x	$x = 4{,}9$	$x_{0;2} = 5$	$x = 5{,}1$
f(x)	$f(x) \approx -41{,}6$	$f(x) = \pm\infty$	$f(x) \approx 38{,}6$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+2x} = \frac{1}{x+2}$

x	$x = -2{,}1$	$x_{0;1} = -2$	$x = -1{,}9$
f(x)	$f(x) = -10$	$f(x) = \pm\infty$	$f(x) = 10$

c) $f(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)(x+7)}$

x	$x = 2{,}9$	$x_{0;1} = 3$	$x = 3{,}1$
f(x)	$f(x) \approx 0{,}6$	$f(x) = 0{,}6$	$f(x) \approx 0{,}6$

x	$x = -6{,}9$	$x_{0;2} = -7$	$x = -7{,}1$
f(x)	$f(x) = -39$	$f(x) = \pm\infty$	$f(x) = 41$

$$f(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)(x+7)} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+7)} = \frac{x+3}{x+7}$$

Aufgabe 2

Zunächst erstellst du eine Funktion der Form $f(x) = \frac{(x+2)}{(x-5)(x-7)}$. Damit hast du die Lage der Pol und Nullstellen festgelegt. Dabei fällt dir aber bestimmt auf, dass die Vorzeichenwechsel noch nicht stimmen. Dafür muss die zweite Polstelle quadriert werden. Zwischen den beiden Polstellen kannst du noch eine Nullstelle einfügen, damit der Verlauf stimmt. Dazu kannst du zur Veranschaulichung noch einen Vorfaktor angeben. Das Ergebnis sieht dann Zum Beispiel wie folgt aus: $f(x) = \frac{100(x+2)(x-6)}{(x-5)(x-7)^2}$

Lösungen


StrandMathe
Meer fürs Denken
Das Übungsheft
Oberstufe
Teil 2

Klasse 11,2 - Oberthema A

Differenzialrechnung

Arbeitsblatt 01: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Aufgabe 1

$x_{\text{unstetig}} = \{-3{,}5;\ -1\}$

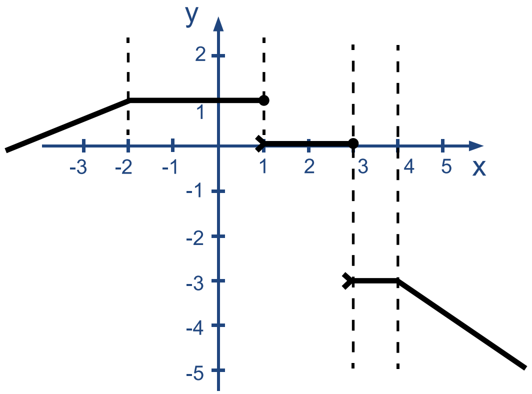
$x_{\text{nicht diff.bar}} = \{-3{,}5;\ -2{,}5;\ -2;\ -1;\ 0;\ 2;\ 3;\ 4\}$

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ für } x < -3{,}5 \\ f_2(x) \text{ für } -3{,}5 \le x < -2{,}5 \\ f_3(x) \text{ für } -2{,}5 \le x < -2 \\ f_4(x) \text{ für } -2 \le x \le -1 \\ f_5(x) \text{ für } -1 < x \le 0 \\ f_6(x) \text{ für } 0 < x \le 2 \\ f_7(x) \text{ für } 2 < x \le 3 \\ f_8(x) \text{ für } 3 < x \le 4 \\ f_9(x) \text{ für } 4 < x \end{cases}$$

Aufgabe 2

z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 2 & \text{für} & x \le -2 \\ 1 & \text{für} & -2 < x \le 1 \\ 0 & \text{für} & 1 < x \le 3 \\ -3 & \text{für} & 3 < x \le 4 \\ -\frac{3}{4}x & \text{für} & 4 < x \end{cases}$$



Aufgabe 3

Funktionsabschnitt g(x) für 1< x ≤2

damit stetig: $g(1) = f(1) = 3$ und $g(2) = f(2) = 1$

differenzierbar bei x = 2: $g`(2) = f`(2) = 0$

- Funktionsabschnitt kann keine Gerade sein (weil Steigung gleich null ist bei x = 2 , aber Höhendifferenz zwischen den Abschnitten)

→ einfachste bekannte Lösung ist Parabel (mit Scheitelpunkt S(2|1), da dort Steigung

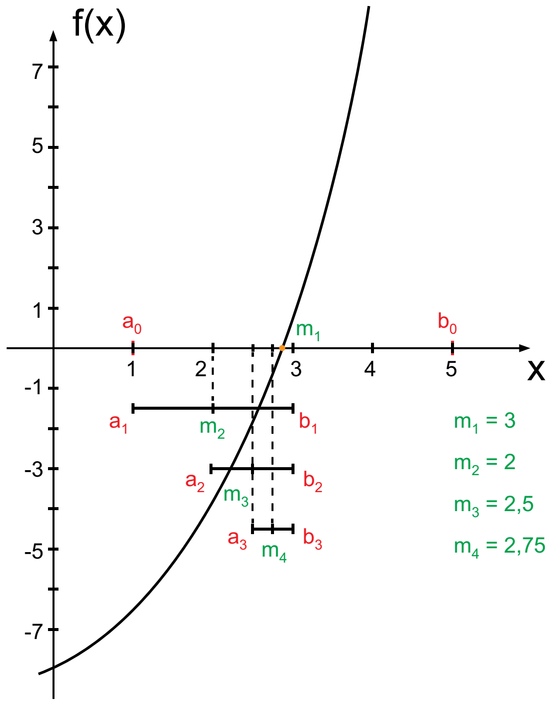
Scheitelpunktform: $g(x) = a \cdot (x-2)^2 + 1$

a bestimmen: $g(1) = 3 = a \cdot (1-2)^2 + 1 \quad \rightarrow \quad a = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für} & x \le 1 \\ 2 \cdot (x-2)^2 + 1 & \text{für} & 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{für} & 2 < x \end{cases}$$

Arbeitsblatt 02: Nullstellensatz und Intervallhalbierung

Aufgabe 1



Aufgabe 2

$f(1) = -1^4 + 4 \cdot 1^3 - 1^2 + 1 = 3$

$m_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$

$m_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

$m_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$

$m_4 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{3{,}5+4}{2} = 3{,}75$

$m_5 = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{3{,}75+4}{2} = 3{,}875$

$m_6 = \frac{a_5+b_5}{2} = \frac{3{,}75+3{,}875}{2} = 3{,}8125$

$f(5) = -5^4 + 4 \cdot 5^3 - 5^2 + 1 = -149$

$f(m_1 = 3) = -3^4 + 4 \cdot 3^3 - 3^2 + 1 = 19$

$f(m_2 = 4) = -4^4 + 4 \cdot 4^3 - 4^2 + 1 = -15$

$f(m_3 = 3{,}5) = -3{,}5^4 + 4 \cdot 3{,}5^3 - 3{,}5^2 + 1 \approx 10{,}19$

$f(m_4 = 3{,}75) = -3{,}75^4 + 4 \cdot 3{,}75^3 - 3{,}75^2 + 1 \approx 0{,}12$

$f(m_5 = 3{,}875) = \ldots \approx -6{,}74$

$f(m_6 = 3{,}8125) = \ldots \approx -3{,}14$

Nullstelle liegt in dem Intervall [3,75; 3,8125].
Damit ist die Nullstelle auf eine Nachkommastelle genau eingegrenzt, denn
3,8125 - 3,75= 0,06 25 < 0,1

Aufgabe 3

Gesuchte Funktion lautet: $f(x) = x^3 - 100$

da die Nullstelle dieser Funktion das Problem löst: $0 = x_0^3 - 100 \rightarrow 100 = x_0^3 \rightarrow \sqrt[3]{100} = x_0$

Geschickte Wahl des ersten Grenzintervalls: z.B. [0; 10] , da $10^2 = 100 < 10^3$, aber es lässt sich noch besser eingrenzen z.B. mit [3; 5], da $3^3 = 27 < 100 < 5^3 = 125$

Start der Berechnung:

n	a_n	b_n	f(a)	f(b)	m_{n+1}	$f(m_{n+1})$
0	3	5	-73	25	4	-36
1	4	5	-36	25	4,5	-8,9
2	4,5	5	-8,9	25	4,75	7,2
3	4,5	4,75	-8,9	7,2	4,625	-1,1
4	4,625	4,75	-1,1	7,2	4,6875	3

Ergebnis:

$4{,}625 < \sqrt[3]{100} < 4{,}6875$

Arbeitsblatt 03: Newton-Verfahren

Aufgabe 1

$f(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 + 1$

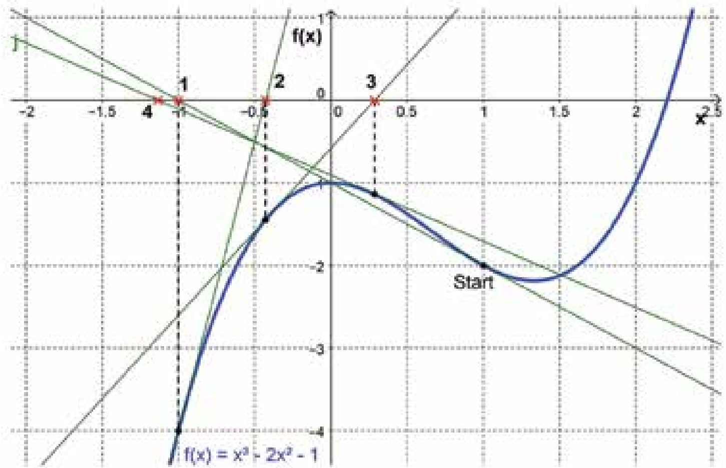
$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 2x$

n	0	1	2	3	4
x	5	4,29	3,90	3,77	3,75
f(x)	-149	-40,35	-8,34	-0,78	-0,01
f'(x)	-210	-103,6	-62,65	-51,14	-49,9

n	0	1	2	3	4	5	6
x	3	6,17	5,06	4,33	3,92	3,77	3,753
f(x)	19	-545,12	-162,64	-44,50	-9,48	-0,97	-0,01
f'(x)	-6	-494,02	-221,7	-108,35	-64,29	-51,44	-49,91

- bei Bestimmung der Nullstelle auf eine Nachkommastelle genau liefern beide Startwerte als Ergebnis $x_{Nst} = 3{,}7$
- obwohl der Startwert 3 dichter am Ergebnis liegt, braucht es (aufgrund der Gestalt der Funktion) hier mehr Schritte (n = 6), bis die Nullstelle ausreichend genau ermittelt wurde
- der Startwert 5 liefert bereits nach 4 Schritten ein sehr genaues Ergebnis (auch der Funktionswert mit f(3,75) = -0,01 deutet bereits darauf hin, nicht nur die kleine Änderung des x-Wertes von einem zum nächsten Schritt)!
- Im Vergleich zum Intervallhalbierungsverfahren von Kapitel A02 Übung 2 gelangt das Newton-Verfahren ebenfalls schneller und genauer zum Ergebnis (dort 6 Schritte)

Aufgabe 2



n	0	1	2	3
x	1,5	4,33	3,24	2,59
f(x)	-2,125	42,81	11,93	2,95
f'(x)	0,75	39	18,46	9,75

Zunächst soll der graphische Ansatz allgemein zeigen, wie das Verfahren bildlich aussieht. Gleichzeitig erkennt man, dass der Startwert offenbar unglücklich gewählt ist, da die Tangenten erkennen lassen, dass die berechneten Stellen hin- und herspringen. Dies führt dazu, dass das Verfahren nicht unbedingt konvergiert und sich sogar von der Nullstelle entfernt. Wählt man als Startwert 1,5 (also eigentlich unweit von 1), so konvergiert das Verfahren. Dieses Verhalten lässt sich auf die Extrempunkte zurückführen, insbesondere auf die Lage des Tiefpunkts zwischen den Startwerten!

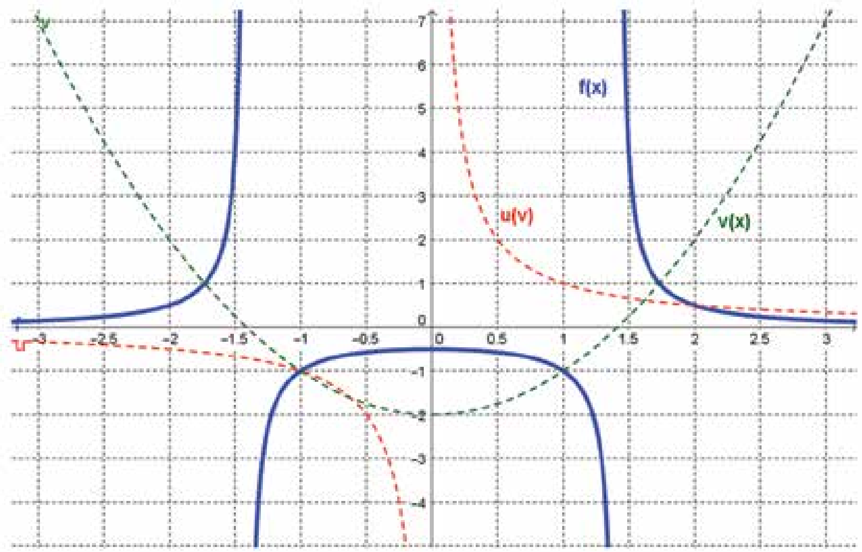
Aufgabe 3

Die Funktion ist eine nach unten verschobene, nach oben geöffnete Parabel. Berechnet man die Nullstellen direkt, erhält man als Ergebnis $x_0 = \pm\sqrt{6} = \pm 2{,}45$. Somit befinden sich in dem genannten Intervall zwei Nullstellen. Je nach dem, welchen Startwert man wählt, trifft man auf eine andere Nullstelle. Wählt man als Startwert 0, so wird das Verfahren überhaupt keine Lösung liefern können, da die Steigung am Tiefpunkt ebenfalls null ist. Es ist daher wichtig, das Intervall, in dem gesucht werden soll, schon vorab möglichst genau einzugrenzen.

Arbeitsblatt 04: Funktionsverkettung

Aufgabe 1

x	v(x)	u(v)	f(x)=u(v(x))
-2	2	-0,5	0,5
-1,5	0,25	-0,667	4
-1	-1	-1	-1
-0,5	-1,75	-2	-0,571
0	-2	---	-0,5
0,5	-1,75	2	-0,571
1	-1	1	-1
1,5	0,25	0,667	4
2	2	0,5	0,5



Erkennbar: Die Funktionsverkettung führt zu einem völlig neuen Funktionsverlauf.

Aufgabe 2

a) $p(x) = -4(x-3)^5$ $\quad q(x) = -4x^5 - 3$

b) $p(x) = \sin(x^3)$ $\quad q(x) = \sin^3(x)$

c) $p(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad q(x) = \sqrt{x} + 1$

d) $p(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ $\quad q(x) = \frac{1}{3^x}$

e) $p(x) = (\log_4 x)^4$ $\quad v(x) = \log_4(x^4) = 4 \cdot \log_4 x$

Aufgabe 3

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sin(|x+1|)} - 3\right)^2}$$

- $v(x) = |x+1|$
- $u(v) = \sin(v)$
- $t(u) = \sqrt{u} - 3$
- $s(t) = t^2$ oder direkt $s(t) = \frac{1}{t^2}$
- $r(s) = \frac{1}{s}$

$$f(x) = r\left(s\left(t\left(u\left(v(x)\right)\right)\right)\right)$$

Arbeitsblatt 05: Kettenregel

Aufgabe 1

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x^3-2x)^2} \cdot (3x^2-2) = \frac{-3x^2+2}{(x^3-2x)^2}$

b) $f'(x) = -3\cos(3x-1)$

c) $f'(x) = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x^2+5}} = -\frac{x}{\sqrt{-x^2+5}}$

d) $f'(x) = -5 \cdot \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2{,}5\cdot\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}(2x^6-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (12x^5-3) = (18x^5-4{,}5) \cdot \sqrt{2x^6-3x}$

Aufgabe 2

a) $f'(x) = -\frac{1}{(\sin(3x^2-1))^2} \cdot \cos(3x^2-1) \cdot 6x = \frac{-6x}{\tan(3x^2-1)\cdot\sin(3x^2-1)}$

b) $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2x} - 4} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{4x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2x} - 4}$

c) $f'(x) = -\sin((-x^2+2)^3) \cdot 3(-x^2+2)^2 \cdot (-2x) = (6x^5-24x^3+24x) \cdot \sin((-x^2+2)^3)$

Aufgabe 3

$$A = 3x + 0{,}5 = \pi \cdot r^2 \quad \rightarrow \quad r(x) = \sqrt{\frac{3x+0{,}5}{\pi}}$$

$$r'(x) = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3x+0{,}5}{\pi}}} \quad \rightarrow \quad 0{,}2 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3x_{min}+0{,}5}{\pi}}}$$

$$\frac{3}{0{,}4\pi} = \sqrt{\frac{3x_{min}+0{,}5}{\pi}} \quad \rightarrow \quad \frac{9}{0{,}16\pi} - 0{,}5 = 3x_{min} \quad \rightarrow x_{min} = 5{,}8$$

Es müssen mindestens 5,8 Tage vergehen, damit das Wachstum weniger als 0,2 Meter pro Tag beträgt.

Arbeitsblatt 06: Produktregel

Aufgabe 1

a) $f'(x) = -3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot \sin(x)$

b) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + (x^2-2) \cdot \cos(x)$

c) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Aufgabe 2

a) $f'(x) = 2x \cdot \cos(\sqrt{x}) - 0{,}5x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(\sqrt{x})$

b) $f'(x) = (-(x-3)^3 \cdot 4x - 3(x-3)^2 \cdot 2x^2) \cdot \cos(x) + (x-3)^3 \cdot 2x^2 \cdot \sin(x)$
$= (-10x^4 + 72x^3 - 162x^2 + 108x)\cos(x) + (2x^5 - 18x^4 + 54x^3 - 54x^2)\sin($

Aufgabe 3

$$f'(t) = \frac{1}{4} \cdot \sin(3t) + \frac{3}{4} t \cdot \cos(3t) > 6$$

Hier muss man ein gewisses Gespür für das Funktionsverhalten zeigen, denn so unmittelbar lässt sich die Gleichung nicht lösen. Man muss mit einigen Überlegungen zum Ergebnis gelangen:

- der vordere Term $\frac{1}{4} \cdot \sin(3t)$ nimmt im Extremfall den Wert 0,25 an, dann ist jedoch der hintere Term 0, folglich muss das Augenmerk auf dem hinteren Term liegen
- die Extremwerte des hinteren Terms $\frac{3}{4} t \cdot \cos(3t)$ folgen einer linearen Zunahme mit $\frac{3}{4} t$
- der lineare Term nimmt erstmals bei $t_{min} = 8$ den Wert 6 an
- an der Stelle gilt zunächst: $f'(t = t_{min} = 8) = \frac{1}{4} \cdot \sin(3 \cdot 8) + \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \cos(3 \cdot 8) = 2{,}32$
  - Achtung: Taschenrechner auf Radian umstellen
- $f'(t)$ ist definitiv > 6 beim nächsten Hochpunkt der Kosinusfunktion
- für $t_{min} = 8$ steht im Inneren des Kosinus' $3 \cdot 8 = 24 = 7{,}64\pi$, somit liegt der nächste Hochpunkt bei $8\pi = 25{,}13$ vor, das entspricht einem $t_{min} = \frac{25{,}13}{3} = 8{,}38$

Die Funktion hat folglich erstmalig eine Steigung größer als 6 auf dem Intervall $8 < t_{min} < 8{,}38$

Arbeitsblatt 07: Quotientenregel

Aufgabe 1

a) $f'(x) = \frac{2x\cdot(3x+7)-3\cdot(x^2-1)}{(3x+7)^2} = \frac{3x^2+14x+3}{9x^2+42x+49}$

b) $f'(x) = \frac{\sin(x)\cdot(-x^3+2x)+\cos(x)\cdot(-3x^2+2)}{(-x^3+2x)^2} = \frac{\sin(x)\cdot(-x^3+2x)+\cos(x)\cdot(-3x^2+2)}{x^6-4x^4+4x^2}$

c) $f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(\sin(x)-4x^5)-(\cos(x)-20x^4)\cdot(1+x+\sqrt{x})}{(\sin(x)-4x^5)^2}$

d) $f'(x) = \frac{3bx^2\cdot(\sqrt{x}+bx)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+b\right)\cdot(bx^3-c)}{(\sqrt{x}+bx)^2} = \frac{3bx^{\frac{5}{2}}+3b^2x^3-\frac{b}{2}x^{\frac{5}{2}}+\frac{c}{2\sqrt{x}}-b^2x^3+bc}{x+2bx^{\frac{3}{2}}+b^2x^2}$

Aufgabe 2

a) $f(x)=\frac{3x^3-4x+2}{2x^2}=\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

b) $f'(x)=\frac{3x^2\cdot\cos(x^3)\cdot(2x-5)-2\sin(x^3)}{4x^2-20x+25}$

c) $f(x)=\frac{\tan(x)}{\sin(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)\sin(x)}=\frac{1}{\cos(x)} \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\cos^2(x)}\cdot-\sin(x)=$

$=\frac{\tan(x)}{\cos(x)}$

d) $f'(x)=\frac{(6x^5+6x^2)\cdot\sqrt{x^3+1}-3x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}\cdot(x^6+2x^3+1)}{x^3+1}=\frac{6x^5+6x^2}{\sqrt{x^3+1}}-\frac{3x^8+6x^5+3x^2}{2\cdot(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$

Aufgabe 3

Wir können den genannten Zusammenhang nachweisen, indem wir jeweils einmal streng nach beiden Ableitungsvorschriften vorgehen und dabei zum gleichen Ergebnis kommen.

$f(x)=\frac{3x^2}{2x-1} \quad = \quad 3x^2\cdot(2x-1)^{-1}$

Quotientenregel:

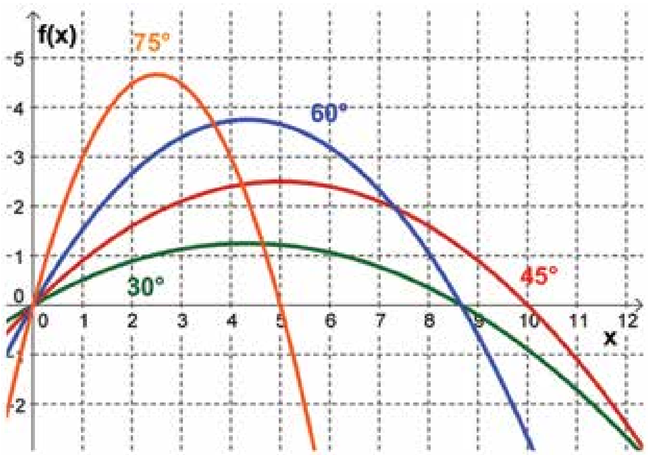
$f'(x)=\frac{6x\cdot(2x-1)-(3x^2\cdot 2)}{(2x-1)^2}=\frac{6x}{(2x-1)}-\frac{6x^2}{(2x-1)^2}$

Produkt- und Kettenregel:

$f'(x)=6x\cdot(2x-1)^{-1}+(-(2x-1)^{-2}\cdot 2\cdot 3x^2)=\frac{6x}{(2x-1)}-\frac{6x^2}{(2x-1)^2}$

Arbeitsblatt 08: Parameterstudien und Ortskurve

Aufgabe 1



$f(x)=0=-\frac{1}{20\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x_0^2+\tan(\alpha)\cdot x_0 \rightarrow 0=x_0\left(-\frac{1}{20\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x_0+\tan(\alpha)\right)$

$0=-\frac{1}{20\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x_0+\tan(\alpha) \rightarrow \frac{1}{20\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x_0=\tan(\alpha) \rightarrow x_0=20\cdot\cos^2(\alpha)\cdot\tan(\alpha)$

$x_0(\alpha)=20\cdot\cos^2(\alpha)\cdot\tan(\alpha)=20\cdot\cos^2(\alpha)\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=20\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$ soll maximal werden

Es sollte einem aber bekannt sein, dass die Multiplikation der beiden Winkelfunktionen genau dann am größten ist, wenn beide gleich sind. Also bei 45°.

Oder aber man bestimmt die Ableitung und setzt diese gleich null, um einen Hoch- bzw. Extrempunkt nachzuweisen:

$x_0'(\alpha)=20\cdot(-\sin^2(\alpha_E)+\cos^2(\alpha_E))=0 \rightarrow \sin^2(\alpha_E)=\cos^2(\alpha_E) \rightarrow \alpha_E=45°$

Auch hier muss man die Verläufe der beiden Winkelfunktionen kennen, um zu wissen, dass sie bei 45° den gleichen Wert annehmen. Somit wäre auch die Annahme von oben bestätigt. Als Nachweis noch einmal die Wurfweite für 45°: $x_{0,45°}=20\cdot\cos^2(45°)\cdot\tan(45°)=20\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 1=10$

Aufgabe 2

$f'(x)=2x^3+3bx^2-12b^2x$

$f''(x)=6x^2+6bx-12b^2$

$0=6x_w^2+6bx_w-12b^2 \rightarrow 0=x_w^2+bx_w-2b^2 \rightarrow x_{w1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+2b^2}=-\frac{b}{2}\pm$

$x_{w1}=b \qquad x_{w2}=-2b$

$b=x_{w1}$ und $b=\frac{-x_{w2}}{2}$ Fallunterscheidung zwischen den beiden Wendepunkten, s. unten

$f(x_{w1})=\frac{1}{2}x_{w1}^4+x_{w1}x_{w1}^3-6{x_{w1}}^2x_{w1}^2=-\frac{9}{2}x_{w1}^4$

- bei einem positiven b, liegen alle Wendepunkte mit positiver x-Koordinate auf dieser x_{w1}-Kurve, die anderen liegen auf der anderen Kurve

$f(x_{w2})=\frac{1}{2}x^4+\frac{-x_{w2}}{2}x^3-6\left(\frac{-x_{w2}}{2}\right)^2x^2=-\frac{3}{2}x_w^4$

- bei einem positiven b, liegen alle Wendepunkte mit negativer x-Koordinate auf dieser x_{w2}-Kurve, die anderen liegen auf der anderen Kurve
- bei einem negativen b ändert sich dieser Zusammenhang. Dann liegen alle Wendepunkte mit positiver x-Koordinate auf der x_{w2}-Kurve

Aufgabe 3

$A_{Rechteck} = a \cdot b$ $\quad U = 2a + 2b$ $\quad$ Verhältnis von a und b: $\frac{b}{a} = q \rightarrow b = q \cdot a$

$$U = 2a + 2aq = 2a \cdot (1 + q) \rightarrow a = \frac{U}{2 + 2q}$$

$A_{Rechteck} = \frac{U}{2+2q} \cdot q \cdot \frac{U}{2+2q} = q \cdot \left(\frac{U}{2+2q}\right)^2$ $\quad$ Für q gilt: $0 < q \leq 1$

Der Parameter q liegt zwischen 0 und 1 und kann nicht größer als 1 sein, da ein Parameter von z.B. 2 auch durch q = 0,5 abgedeckt wird (es ist egal, welche Seite die längere ist, ob a oder b, das Rechteck bleibt das gleiche).
Verschiedene Möglichkeiten, das Verhältnis mit dem größten Flächeninhalt zu bestimmen

- eigentlich Maximum der Funktion berechnen durch Nullstellenbestimmung der Ableitung (ist hier mathematisch etwas schwierig)
- graphisch lösen
- „Ausprobieren“ durch Einsetzen verschiedener Werte

Wir lösen mit letzterem:

q	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
A	0,035 U²	0,05 U²	0,059 U²	0,062 U²	0,0625 U²

Ein Verhältnis von 1 liefert den größten Flächeninhalt bei gegebenem Umfang. Bei diesem Verhältnis handelt es sich um ein Quadrat, was auch die logische Figur für maximalen Flächeninhalt eines Vierecks ist. Auch die steigende Tendenz der Werte untermauert dieses Verhalten.

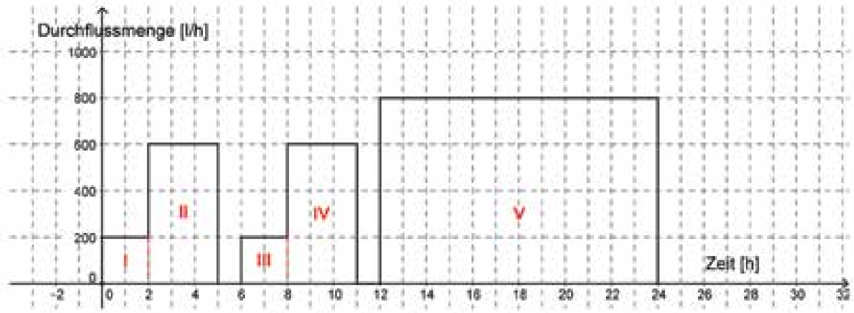
Klasse 11,2 - Oberthema B

Integralrechnung

Arbeitsblatt 01: Momentane Änderungsrate

Aufgabe 1

Beispielhafte Flächenunterteilung:



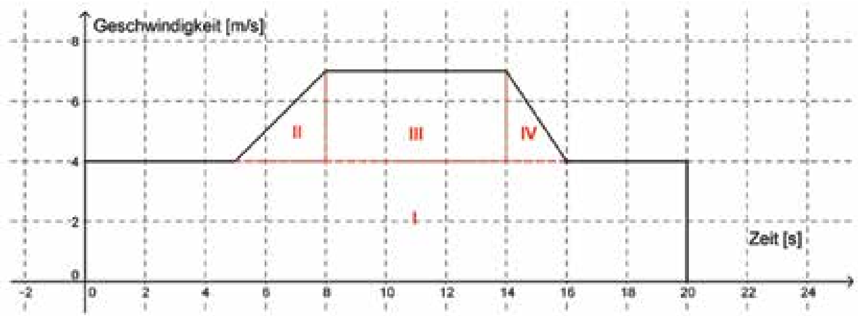
$A_I = 2\,h \cdot 200\,l/h = 400\,l$ $\quad A_{II} = 3\,h \cdot 600\,l/h = 1800\,l$

$A_{III} = A_I = 400\,l$ $\quad A_{IV} = A_{II} = 1800\,l$

$A_V = 12\,h \cdot 800\,l/h = 9600\,l$

Gesamtfläche $A_{ges} = \sum_i^N A_i = 14000\,l$

Aufgabe 2



$A_I = 20\,s \cdot 4\,m/s = 80\,m$ $\quad A_{II} = \frac{1}{2} \cdot 3\,s \cdot 3\,m/s = 4{,}5\,m$

$A_{III} = 6\,s \cdot 3\,m/s = 18\,m$ $\quad A_{IV} = \frac{1}{2} \cdot 2\,s \cdot 3\,m/s = 3\,m$

Gesamtfläche $A_{ges} = \sum_i^N A_i = 105{,}5\,m$

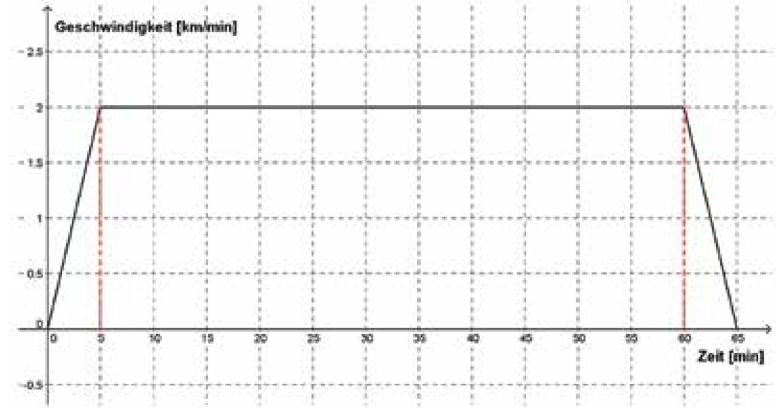
Aufgabe 3

Berechnung der Reisegeschwindigkeit:

$$120\,km = \frac{1}{2} \cdot 5\,min \cdot v_{reise} + 55\,min \cdot v_{reise} + \frac{1}{2} \cdot 5\,min \cdot v_{reise} = 5\,min \cdot v_{reise} + 55 min \cdot v_{reise}$$
$$= 60\,min \cdot v_{reise}$$

$$v_{reise} = 2\frac{km}{min} = 120\frac{km}{h}$$

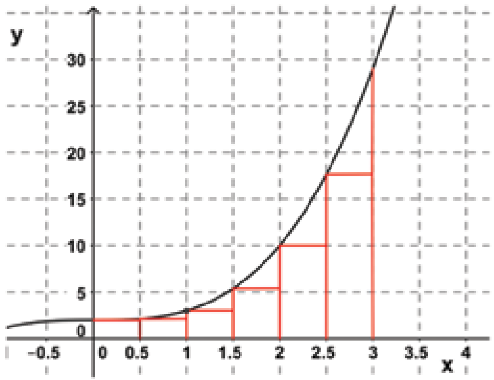
Entweder kennt man das „Dreiecksverhalten" beim Beschleunigen bereits aus Aufgabe 2, dann kann man direkt die Gleichung aufstellen, oder man muss sich zunächst eine Skizze zur Veranschaulichung erstellen. Vermutlich macht man beides parallel.



Arbeitsblatt 02: Ober- und Untersumme

Aufgabe 1

Die Werte der einzelnen Stellen der Funktion kannst du entweder ablesen oder ausrechnen. Beispielhaft ist in der Graphik die Untersumme mit einer Intervallbreite h = 0,5 dargestellt.



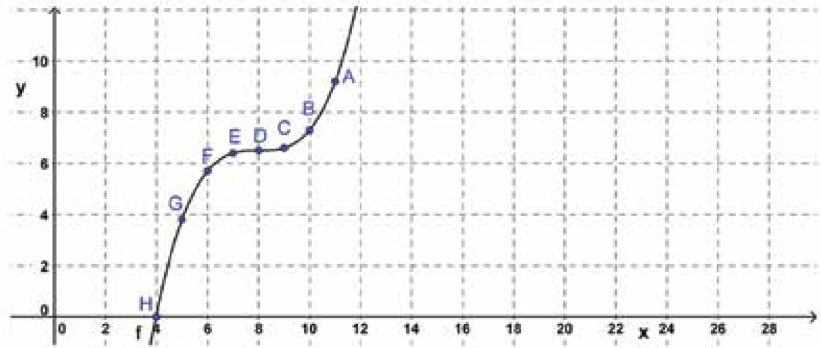
Intervallbreite h = 1:
Untersumme $A_U = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 15$
Obersumme $A_O = 3 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 29 \cdot 1 = 42$

Intervallbreite h = 0,5:
Untersumme
$A_U = 2 \cdot 0{,}5 + 2{,}125 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 + 5{,}375 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}5 + 17{,}625 \cdot 0{,}5 = 20{,}0625$
Obersumme
$A_O = 2{,}125 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 + 5{,}375 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}5 + 17{,}625 \cdot 0{,}5 + 29 \cdot 0{,}5 = 33{,}5625$

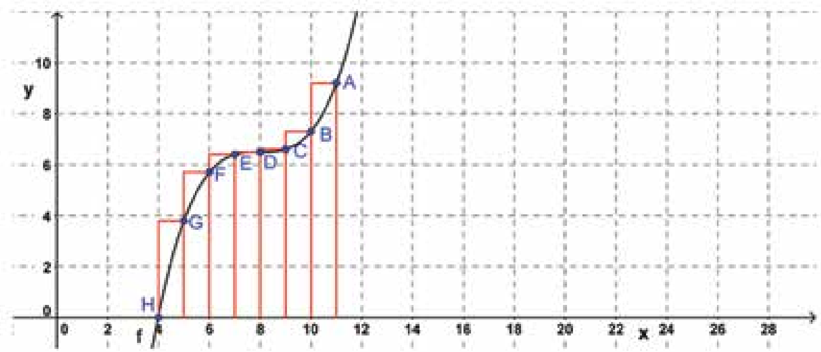
Ober- und Untersumme nähern sich an, wenn die Intervallbreite verkleinert wird. Das Ergebnis wird dadurch genauer.

Aufgabe 2

a)

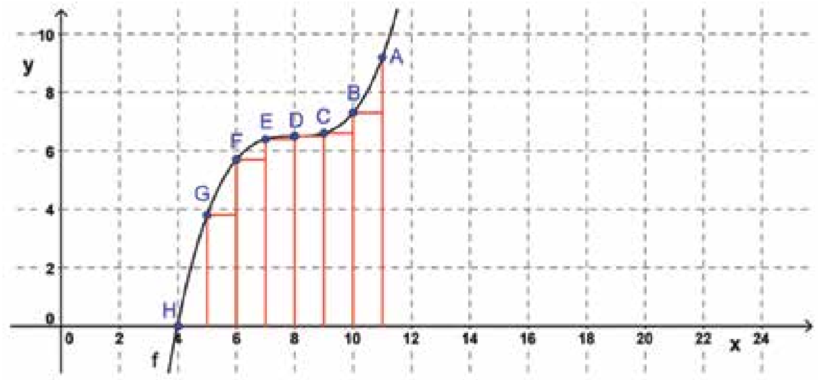


b)



$A_O = 3{,}8 \cdot 1 + 5{,}7 \cdot 1 + 6{,}4 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 1 + 6{,}6 \cdot 1 + 7{,}3 \cdot 1 + 9{,}2 \cdot 1 = 45{,}5$ Nm

c)



$A_U = 0 \cdot 1 + 3{,}8 \cdot 1 + 5{,}7 \cdot 1 + 6{,}4 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 1 + 6{,}6 \cdot 1 + 7{,}3 \cdot 1 = 36{,}3$ Nm

d) Für Intervalle mit einer Rechtskrümmung ist die Obersumme näher am Realwert. Für Abschnitte mit Linkskrümmung dementsprechend die Untersumme. Kann man in einer der Graphiken aus b) und c) auch nochmal zeigen. Wird bei kleineren Intervallbreiten jedoch noch deutlicher!

$A_O = 3{,}8 \cdot 1 + 5{,}7 \cdot 1 + 6{,}4 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 1 + 6{,}6 \cdot 1 + 7{,}3 \cdot 1 = 42{,}8$ Nm

Aufgabe 3

Entscheidend für die Genauigkeit der beiden Summen ist die Intervallbreite h. Wird diese unendlich klein kann eine exakte Fläche berechnet werden.
Die Stärke der Krümmung der Funktion hat einen Einfluss, ob weniger oder mehr Intervalle benötigt werden für eine ausreichend genaue Bestimmung der Fläche.

Arbeitsblatt 03: Flächeninhalte bestimmen

Aufgabe 1

$$O_n = \frac{4}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{4}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{4}{n}\right)^2 + \ldots + \left(n \cdot \frac{4}{n}\right)^2\right]$$

$$O_n = \frac{4}{n} \cdot \frac{16}{n^2} \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]$$

$$O_n = \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{64}{6n^2} \cdot (n+1)(2n+1) = \frac{32}{3n^2} \cdot (2n^2 + 2n + n + 1)$$

$$\lim_{n \to \infty} O_n = \frac{64}{3}$$

Aufgabe 2

Obersumme:

$$O_n = \frac{5}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{5}{n}\right)^3 + \left(2 \cdot \frac{5}{n}\right)^3 + \ldots + \left(n \cdot \frac{5}{n}\right)^3\right]$$

$$O_n = \frac{5}{n} \cdot \frac{125}{n^3} \cdot \left[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right]$$

$$O_n = \frac{625}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{625}{4n^2} \cdot (n+1)^2 = \frac{625}{4n^2} \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{625}{4}$$

Untersumme:

$$U_n = \frac{5}{n} \cdot \left[\left(0 \cdot \frac{5}{n}\right)^3 + \left(1 \cdot \frac{5}{n}\right)^3 + \ldots + \left((n-1) \cdot \frac{5}{n}\right)^3\right]$$

$$U_n = \frac{5}{n} \cdot \frac{125}{n^3} \cdot \left[0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3\right]$$

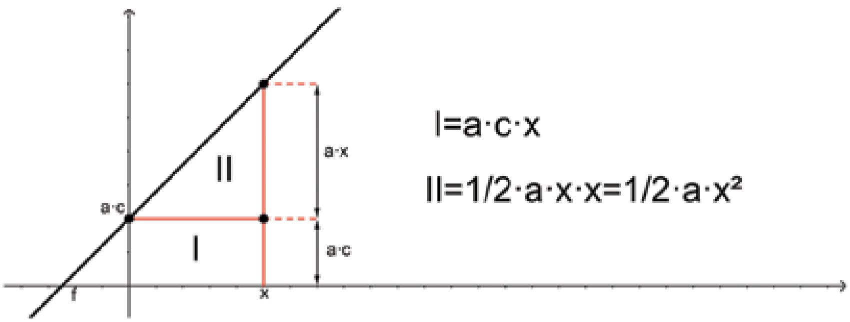
$$U_n = \frac{5}{n} \cdot \frac{125}{n^3} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{625}{4n^2} \cdot (n-1)^2 = \frac{625}{4n^2} \cdot (n^2 - 2n + 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{625}{4}$$

Bei beiden Grenzwerten erhältst du das gleiche Ergebnis.

Arbeitsblatt 04: Integralfunktion

Aufgabe 1



I=a·c·x

II=1/2·a·x·x=1/2·a·x²

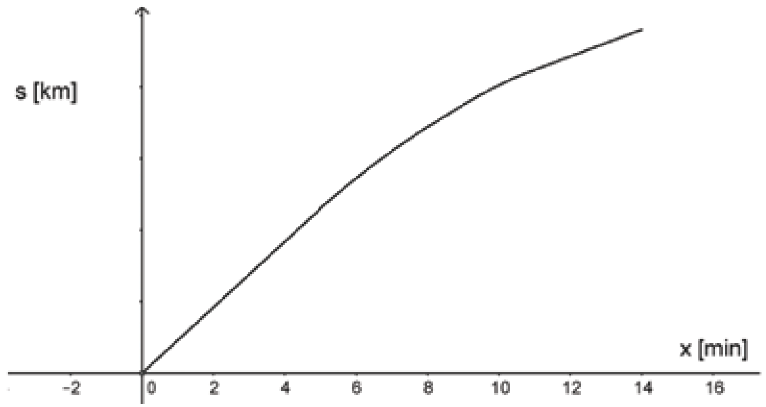
Aufgabe 2

a) $F(x) = 2x^2 - 7x$

b) $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 17x$

c) $F(x) = \frac{17}{2}x^2 + 21x$

Aufgabe 3



In den Abschnitten in denen ein konstanter Wert vorliegt, muss eine lineare Funktion entstehen. Aus den Geraden wird eine Parabelform mit Rechtskrümmung.

Arbeitsblatt 05: Stammfunktion

Aufgabe 1

a) $F(x) = \frac{7}{5}x^5 - 3x^3$

b) $F(x) = \frac{1}{32}x^8 - 3x^9$

c) $F(x) = -\frac{12}{7}x^7 + \frac{45}{2}x^4$

d) $F(x) = \frac{1}{24}x^{-2}$

e) $F(x) = -\frac{14}{9}x^{-3}$

Aufgabe 2

$f(t) = -7(x-5)^4 + 75$ Anwendung: $F(x) = \frac{1}{a} \cdot U(ax+b)$

$F(t) = \frac{-7}{5}(x-5)^5 + 75x + C$

Alternativ:

Mit: $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$f(t) = -7(x-5)^4 + 75 = -7(x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625) + 75$

$f(t) = -7x^4 + 140x^3 - 1050x^2 + 3500x - 4300$

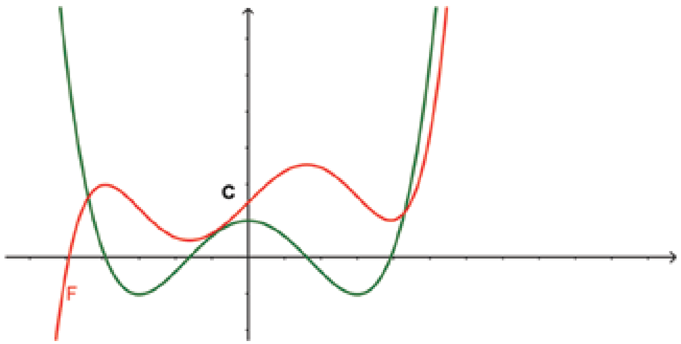
$F(t) = -\frac{7}{5}x^5 + 35x^4 - 350x^3 + 1750x^2 - 4300x + C$

Arbeitsblatt 06: Graphische Herleitung von Stammfunktionen

Aufgabe 1

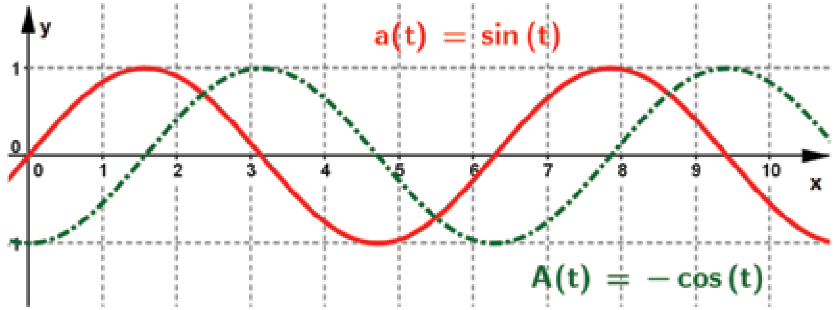
Intervalle/Null-/Extremstellen	Stammfunktion
Intervall I	Positive Steigung
Nullstelle x_{01}	Maximum
Intervall II	Negative Steigung
Minimum x_{E1}	Wendepunkt R/L
Intervall III	Negative Steigung
Nullstelle x_{02}	Minimum
Intervall IV	Positive Steigung
Maximum x_{E2}	Wendepunkt L/R
Intervall V	Positive Steigung
Nullstelle x_{03}	Maximum
Intervall VI	Negative Steigung
Minimum x_{E3}	Wendepunkt R/L
Intervall VII	Negative Steigung
Nullstelle x_{04}	Minimum
Intervall VIII	Positive Steigung

$F(x) = \frac{1}{20}x^5 - 1{,}5x^3 + 10x + C$

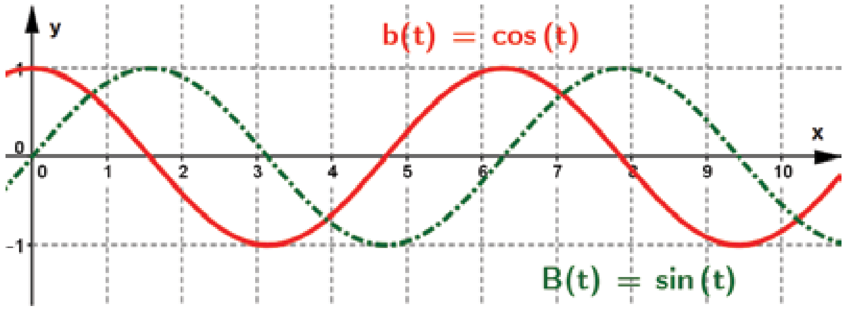


Aufgabe 2

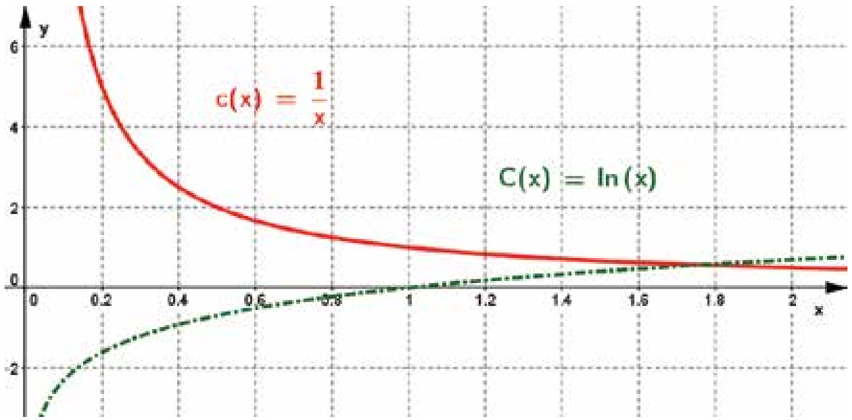
a) $a(t) = \sin(t)$ mit $C = 0$



b) $b(t) = \cos(t)$ mit $C = 0$



c) $c(x) = \frac{1}{x}$



Aufgabe 3

Die Steigung der Funktion muss gleich den Funktionswerten sein, damit gilt:

$f'(x) = f(x)$

Es dürfen keine Nullstellen und Extremstellen vorliegen.

Die Integrationskonstante muss 0 betragen.

Arbeitsblatt 07: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Aufgabe 1

a) $\int_5^{10} -4x^4 + 3x^3 + 17 \, dx = -70383{,}75$

b) $\int_5^{10} 3(x-2)^2 - 7 \, dx = 450$

c) $\int_5^{10} 9x^2 + 1/100x^3 - 4x^4 + 2 \, dx = -74841{,}56$

Aufgabe 2

$G(x) = F(x) + C$

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = [F(x) - C]_a^b = F(b) - C - [F(a) - C] = F(b) - F(a)$$

Die Integrationskonstante fällt beim Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung weg.

Aufgabe 3

Gesucht ist die Fläche oberhalb der x-Achse. Dafür musst du die Nullstellen entweder ablesen oder berechnen.

$t_{0,1} = 5{,}1$ und $t_{0,2} = 14{,}9$

$\int_{5,1}^{14,9} -0{,}5(t-10)^2 + 12 \, dt \approx 78{,}38$

Es wurde also insgesamt ein Weg von 78,38m zurückgelegt.

Arbeitsblatt 08: Flächen zwischen Graph und X-Achse

Aufgabe 1

$x_{0,1} = 2 \qquad x_{0,2} = 5{,}59 \qquad x_{0,3} = 8{,}41$

Positive Fläche:

$\int_2^{5,59} (x-5)^3 - x^2 + 31 \, dx = \int_2^{5,59} x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - x^2 + 31 \, dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{75}{2}x^2 - 94x\right]_2^{5,59}$

$= 244{,}11 - 931{,}61 + 1171{,}8 - 525{,}46 - (4 - 42{,}67 + 150 - 188)$

$= 35{,}51$

Negative Fläche:

Kannst du analog berechnen, du musst nur die Grenzen ändern.

$\int_{5,59}^{8,41} (x-5)^3 - x^2 + 31 \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{75}{2}x^2 - 94x\right]_{5,59}^{8,41}$

$= 1250{,}62 - 3172{,}4 + 2652{,}3 - 790{,}54 - (244{,}11 - 931{,}61 + 1171{,}8 - 525{,}46)$

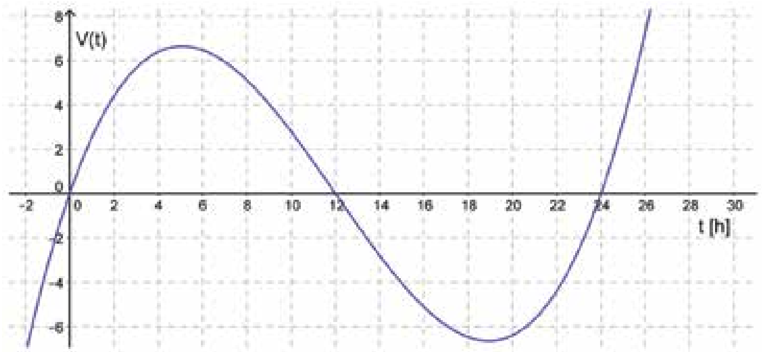
$= -18{,}86$

Gesamtfläche:

$A = \int_2^{5,59} f(x)dx - \int_{5,59}^{8,41} f(x)dx = 35{,}51 - (-)18{,}86 = 54{,}37$

Aufgabe 2

a)



Zur Bestimmung der Wassermenge muss der Betrag des Integrals bestimmt werden.

$x_{0,1} = 0 \qquad x_{0,2} = 12 \qquad x_{0,3} = 24$

Konstante Faktoren kannst du auch vor das Integral ziehen und am Ende damit multiplizieren.

Positive Fläche:

$$\int_0^{12} 0{,}01(t^3 - 36t^2 + 288t)\ dt = 0{,}01 \cdot \left[\frac{1}{4}t^4 - 12t^3 + 144t^2\right]_0^{12}$$

$$= 0{,}01 \cdot [5184 - 20736 + 20736 - (0)] = 51{,}84$$

Negative Fläche:

$$\int_{12}^{24} 0{,}01(t^3 - 36t^2 + 288t)\ dx = 0{,}01 \cdot \left[\frac{1}{4}t^4 - 12t^3 + 144t^2\right]_{12}^{24}$$

$$= 0{,}01 \cdot [82944 - 165888 + 82944 - (5184 - 20736 + 20736)] = -51{,}84$$

Gesamtfläche:

$$A = \int_0^{12} V(t)dt - \int_{12}^{24} V(t)dt = 51{,}84 - (-)51{,}84 = 103{,}68$$

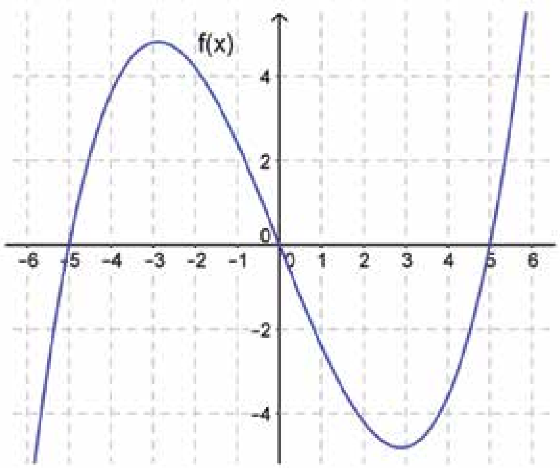
b) In A hast du bereits gesehen, dass beide Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß sind. Das bedeutet, dass gleich viel Wasser abgelaufen ist, wie zugelaufen ist. Du kannst aber auch das Integral über das komplette Intervall bestimmen:

$$\int_0^{24} 0{,}01(t^3 - 36t^2 + 288t)\ dt = 0{,}01 \cdot \left[\frac{1}{4}t^4 - 12t^3 + 144t^2\right]_0^{24}$$

$$= 0{,}01 \cdot [82944 - 165888 + 82944 - (0)] = 0$$

Der Wasserspiegel ist am Ende des Tages der gleiche wie am Anfang.

Aufgabe 3



Zunächst Integration im Intervall [-5 ; 0]

Links nach rechts:

$$\int_{-5}^{0} 0{,}1(x^3 - 25x)dx = 0{,}1 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{25}{2}x^2\right]_{-5}^{0}$$

$$= 0{,}1 \cdot [0 - (156{,}25 - 312{,}5)] = 15{,}625$$

Die Fläche oberhalb der x-Achse ist wie erwartet positiv!

Rechts nach links:

$$\int_0^{-5} 0{,}1(x^3 - 25x)dx = 0{,}1 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{25}{2}x^2\right]_0^{-5}$$

$$= 0{,}1 \cdot [(156{,}25 - 312{,}5) - (0)] = -15{,}625$$

Die Fläche hat durch das Vertauschen der Grenzen ein negatives Vorzeichen.

Integration im Intervall [0 ; 5]

Links nach rechts:

$$\int_0^{5} 0{,}1(x^3 - 25x)dx = 0{,}1 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{25}{2}x^2\right]_0^{5}$$

$$= 0{,}1 \cdot [156{,}25 - 312{,}5 - (0)] = -15{,}625$$

Die Fläche unterhalb der x-Achse ist wie erwartet negativ!

Rechts nach links:

$$\int_5^{0} 0{,}1(x^3 - 25x)dx = 0{,}1 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{25}{2}x^2\right]_5^{0}$$

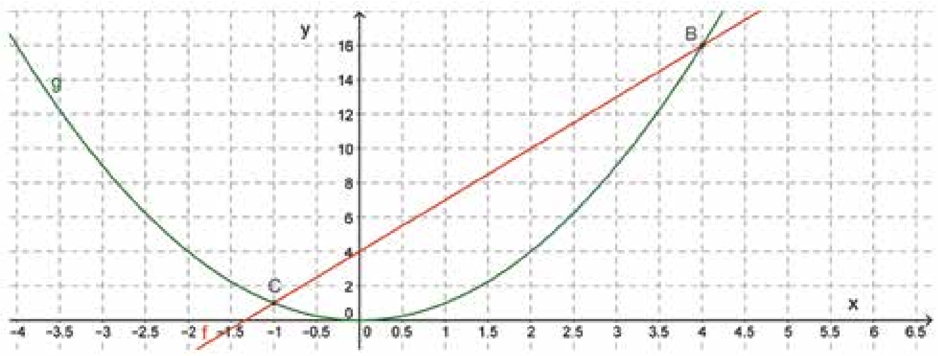
$$= 0{,}1 \cdot [(0) - (156{,}25 - 312{,}5)] = 15{,}625$$

Die Fläche hat durch das Vertauschen der Grenzen ein positives Vorzeichen.

Bei Integration von links nach rechts werden Flächen wie gehabt positiv gezählt, wenn sie oberhalb der x-Achse liegen. Flächen unterhalb hingegen sind negativ. Beim Vertauschen der Grenzen wird jeweils das Vorzeichen geändert.

Arbeitsblatt 09: Flächen zwischen zwei Graphen

Aufgabe 1



Berechnung der Schnittpunkte C und B:

$$x^2 = 3x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad \text{P-Q-Formel}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$$

Flächeninhalt A:

$$A = \int_{-1}^{4} f(x)dx - \int_{-1}^{4} g(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{4} 3x + 4\,dx - \int_{-1}^{4} x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{4} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left[24 + 16 - \frac{3}{2} + 4\right] - \left[\frac{64}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{85}{2} - \frac{65}{3} = 20{,}833$$

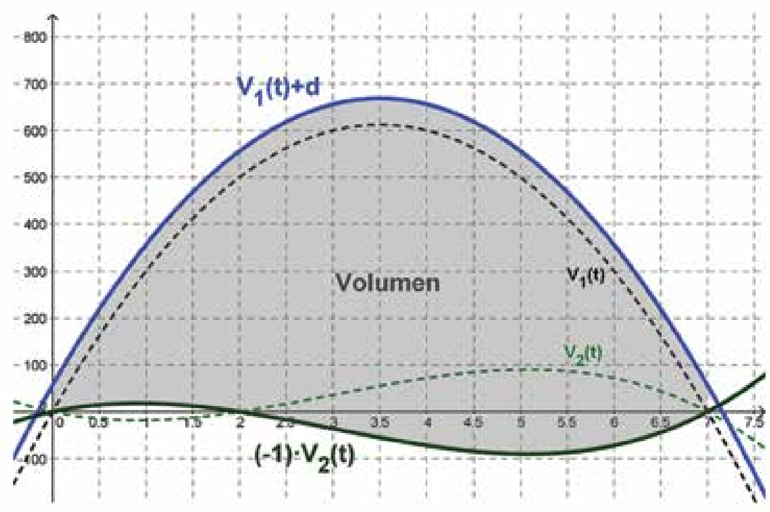
Aufgabe 2

Zunächst Funktionen skizzieren wie in der Graphik, um den Sachverhalt zu verstehen. Der Funktionsverlauf lässt sich gut aus der Gleichung ablesen:

- V_1 (t) ist eine Parabel, die auch in Scheitelpunktform angegeben ist
- V_2 (t) ist in Linearfaktorzerlegung gegeben, sodass sich Nullstellen ablesen lassen

V_1 (t) wird durch den Parameter d in y-Richtung verschoben. Gestrichelt ist die Ausgangsfunktion gezeichnet.

Durch die Zusatzinformation in der Aufgabenstellung muss man sich zunächst bei der gestrichelten Funktion V_2 (t) klar machen, dass hier graphisch keine korrekte Fläche zwischen den Funktionen vorliegt, sondern das Vorzeichen umgekehrt werden muss.



Daraus ergibt sich die gegebene Ansicht, zu der die Integrale aufgestellt werden müssen:

$$A = 3500 = \int_0^7 -50t^2 + 350t + d\,dt - \int_0^2 3t^3 - 27t^2 + 42t\,dt + (-1)\int_2^7 3t^3 - 27t^2 + 42t$$

Auch hier muss man sich mit der Vorzeichenregelung beim Berechnen von Integralen auskennen. Selbstverständlich kann man die hinteren Integrale zusammenführen. Mit geübtem Blick ist schnell ein Ergebnis zu bekommen (oder z.B. direkt V_2 (t) nehmen, dann ist aber die Fläche graphisch nicht direkt zwischen den Kurven zu erkennen).

$$A = \int_0^7 -50t^2 + 350t + d\,dt - \int_0^7 3t^3 - 27t^2 + 42t\,dt$$

$$= \left[-\frac{50}{3}t^3 + 175t^2 + dt\right]_0^7 - \left[\frac{3}{4}t^4 - 9t^3 + 21t^2\right]_0^7$$

$$= \left(-\frac{50}{3} \cdot 343 + 175 \cdot 49 + d \cdot 7 - 0\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 2401 - 9 \cdot 343 + 21 \cdot 49 - 0\right)$$

$$= \frac{37387}{12} + 7d = 3500$$

$$7d = 3500 - \frac{37387}{12} = 384{,}42 \qquad \mathbf{d = 54{,}9}$$

Aufgabe 3

$$A = \int_a^b 4x^2 + 7\,dx - \int_a^b 4x^2 + 2\,dx$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}x^3 + 7x\right]_a^b - \left[\tfrac{4}{3}x^3 + 2x\right]_a^b$$

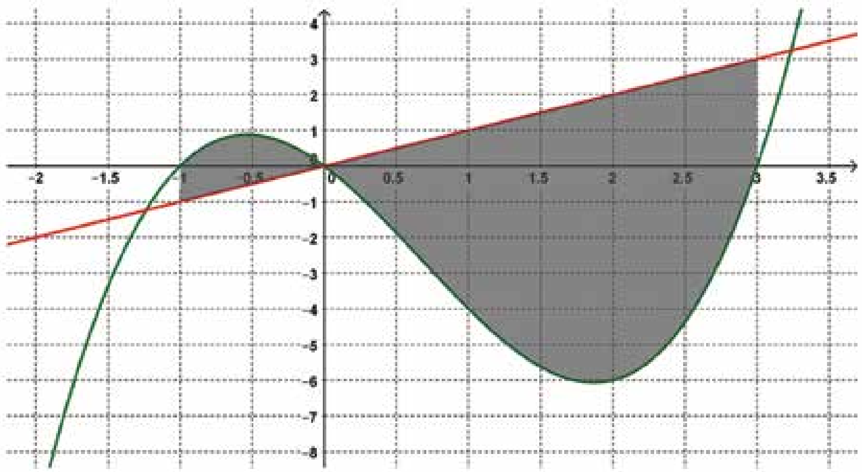
$$= \tfrac{4}{3}b^3 + 7b - \tfrac{4}{3}a^3 - 7a - \tfrac{4}{3}b^3 - 2b + \tfrac{4}{3}a^3 + 2a$$

$$= 7b - 7a - 2b + 2a = 5(b - a)$$

Arbeitsblatt 10: Flächen zwischen Graphen und Differenzfunktion

Aufgabe 1

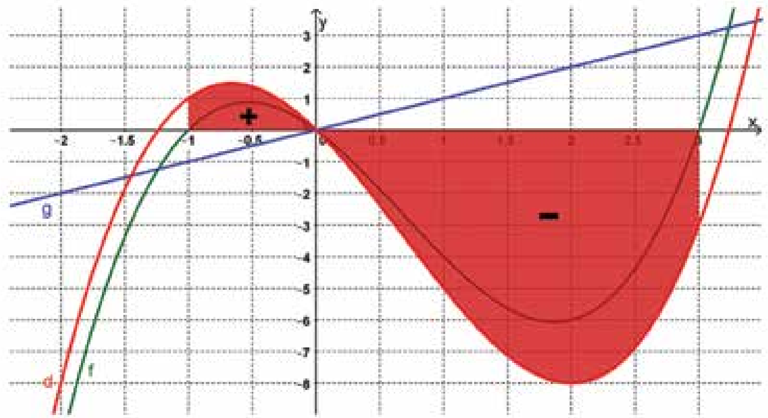
Die beiden gegebenen Funktionen mit gesuchter Fläche im Koordinatensystem:



Differenzfunktion:

$d(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x) - x = x^3 - 2x^2 - 4x$

Differenzfunktion im Koordinatensystem mit zu berechnender Fläche (in rot):



Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass auch die Differenzfunktion eine Nullstelle bzw. einen Vorzeichenwechsel hat (da zunächst f(x) größer ist und dann g(x)). Die Schnittstelle der beiden Funktionen ist die Nullstelle: $x_S^3 - 2x_S^2 - 3x_S = x_S$

Hier lässt sich die eine gesuchte Lösung direkt ablesen (die anderen beiden Schnittstellen liegen außerhalb des betrachteten Intervalls): $x_S = 0$

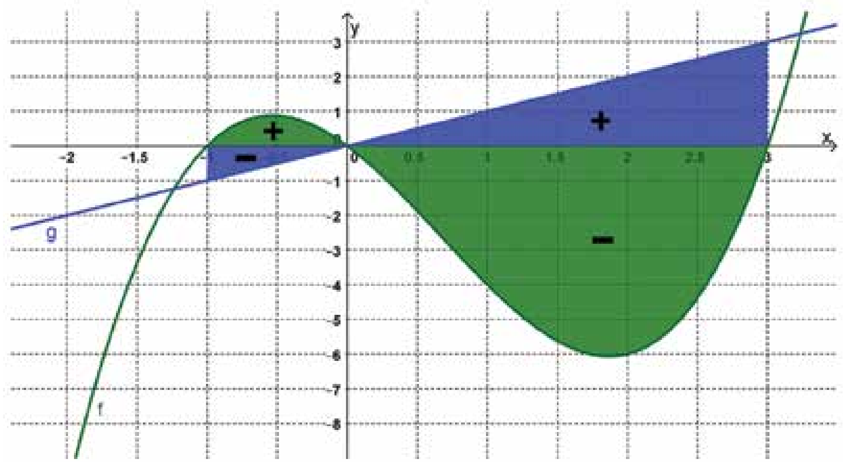
Somit wird das Integral bei $x_S = 0$ aufgeteilt in:

$$A = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 4x\,dx + (-1)\int_0^3 x^3 - 2x^2 - 4x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^3 = \left(0 - \left(-\frac{13}{12}\right)\right) - \left(-\frac{63}{4}\right) = \frac{101}{6}$$

Aufgabenteil b)

Die graphische Aufteilung der Fläche:



Daraus ergeben sich vier einzelne Integrale:

$$A = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 3x\,dx + (-1)\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx + (-1)\int_{0}^{3} x^3 - 2x^2 - 3x\,dx$$

Berechnung hier nicht mehr erforderlich, da bereits oben.

Auch hier geht hervor: Die Differenzfunktion vereinfacht derartige Aufgaben nicht nur durch weniger Integrale, sondern auch durch die Tatsache, dass lediglich eine Stammfunktion bestimmt werden muss.

Aufgabe 2

$\int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)dx + (-1)\int_{-2}^{2} g(x)dx - \int_{2}^{3} g(x)dx$ | „Vorzeichen ändern“

$\int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)dx - \int_{-2}^{2} g(x)dx - \int_{2}^{3} g(x)dx$ | Integrale mit gleicher Funktion können zusammengefasst werden, wenn die Intervalle nahtlos ineinander übergehen

$\int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)dx - \int_{-2}^{3} g(x)dx$ | Integrale zusammenfassen bei gleichem Intervall

$\int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x) - g(x)\,dx$

Die Rechenregeln für Integrale zeigen, dass die Differenzfunktion exakt der detaillierten Aufteilung der Integrale entspricht.
Rechenregeln sind unter anderem:

- Zusammenfassen zweier Integrale mit gleichem Integranden und gleichem Vorzeichen, wenn

- Zusammenfassen von Funktionen/Integralen, wenn Intervallgrenzen gleich sind

Klasse 11,2 - Oberthema C

Exponentialfunktionen

Arbeitsblatt 01: Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

$f(x) = 2 \cdot 3^x$ $g(x) = 1{,}5^x$ $h(x) = 0{,}75^x$

Aufgabe 2

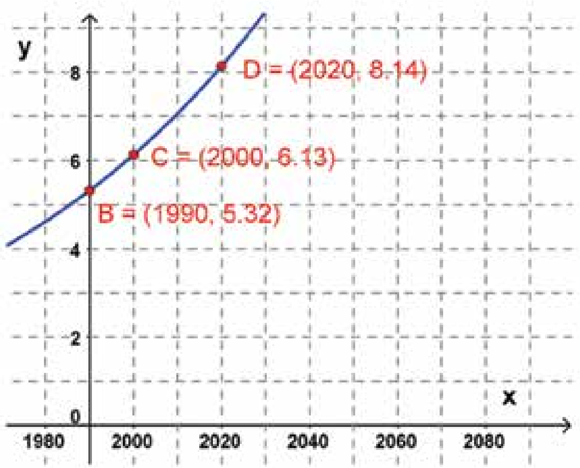
$c \cdot a^{1990} = 5{,}32$ $c \cdot a^{2000} = 6{,}13$

beide nach c auflösen und gleichsetzen

$\frac{5{,}32}{a^{1990}} = \frac{6{,}13}{a^{2000}} \rightarrow \quad a^{10} = \frac{6{,}13}{5{,}32} \quad \rightarrow \quad a \approx 1{,}01427$

Einsetzen

$c \cdot 1{,}01427^{1990} = 5{,}32 \quad \rightarrow \quad c = 3{,}022 \cdot 10^{-12}$



$f(x) = 3{,}022 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}01427^x$

Bis zum Jahr 2020 steigt die Weltbevölkerung nach dieser Abschätzung auf 8,14 Milliarden Menschen.

Aufgabe 3

$f(x) = c \cdot a^x$

Anfangsbestand $10m^2$:

$f(0) = 10m^2 = c \cdot a^0 = c$

Nach 5 Tagen $4m^2$:

$f(5) = 4m^2 = c \cdot a^5 = 10m^2 \cdot a^5 \rightarrow \quad a^5 = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[5]{0{,}4} = 0{,}8326$

$f(x) = 10m^2 \cdot 0{,}8326^x$

Nach x Tagen Anfangsbestand geviertelt.

$f(x) = 10m^2 \cdot 0{,}8326^x = \frac{1}{4} \cdot 10m^2 = 2{,}5m^2$

$0{,}8326^x = \frac{2{,}5m^2}{10m^2} = 0{,}25 \quad | \log_{0{,}8326}$

$x = \log_{0{,}8326} 0{,}25 = 7{,}567$

Nach 8 Tagen ist noch weniger als ein Viertel des Anfangsbestands vorhanden.

Arbeitsblatt 02: Eulersche Zahl

Aufgabe 1

Verdreifachung bedeutet Zinssatz von 200%.

$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{200}{100}\right)^1 = K \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right)^1 = 3K$

Für die Zeitintervalle gilt deshalb:

$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

Zeitintervall	1 Jahr	monatlich	täglich	stündlich	minütlich
n	1	12	365	8760	525600
K_n	3K	6,359K	7,349K	7,387K	7,38903K

Der Wert 7,38903 ist schon sehr nahe an e^2.

Grenzwertbestimmung:

$K \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K \cdot e^2$

Vervierfachung bedeutet Zinssatz von 300%.

$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{300}{100}\right)^1 = K \cdot \left(1 + \frac{3}{1}\right)^1 = 4K$

Für die Zeitintervalle gilt deshalb:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

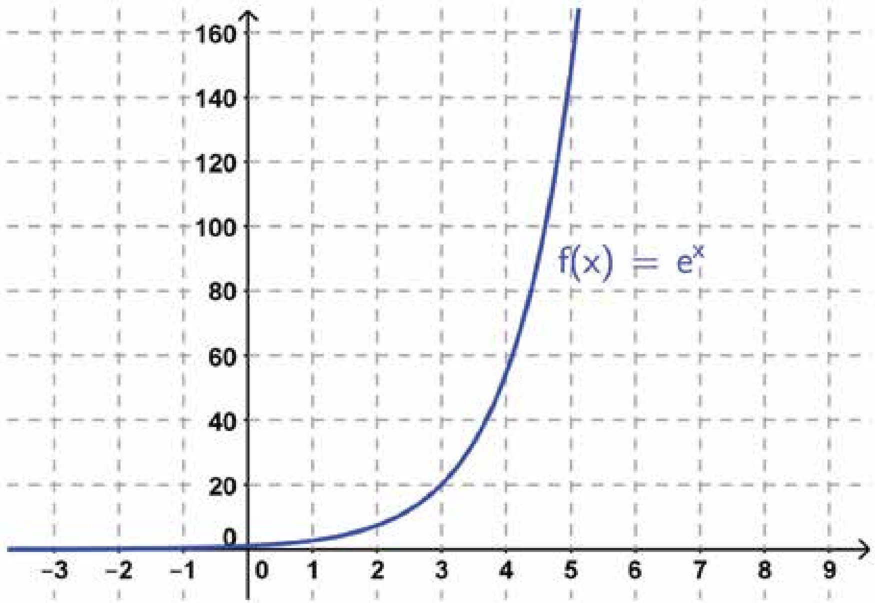
Zeitintervall	1 Jahr	monatlich	täglich	stündlich	minütlich
n	1	12	365	8760	525600
K_n	4K	14,552K	19,841K	20,075K	20,0854K

Der Wert 20,0854 ist schon sehr nahe an e^3.

Grenzwertbestimmung:

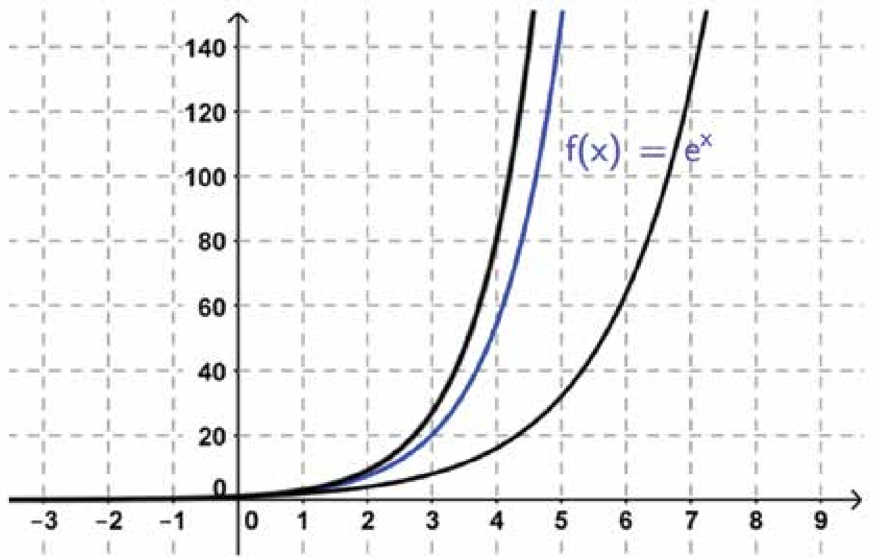
$$K \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = K \cdot e^3$$

Aufgabe 2



Die e-Funktion ist streng monoton steigend. Sie besitzt weder Nullstellen noch Extremstellen. Alle Werte der e-Funktion sind positiv.

Da sie monoton steigend ist, wird auch die Steigung immer größer. Bei der Ableitung handelt es sich auch um eine Exponentialfunktion.



Die exakte Steigung der Ableitung kann mit Hilfe des Differenzenquotienten bestimmt werden.

$$m(h) = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot f'(0)$$

Mit $f'(0) = 1$

$f'(x_0) = e^{x_0}$

Die Ableitung von e^x ist e^x.

Arbeitsblatt 03: Ableitung und Integral der e-Funktion

Aufgabe 1

a)

$f'(x) = 2e^{2x+1}$

$g'(x) = (2 - 3x^2) \cdot e^x + (2x - x^3) \cdot e^x = (-x^3 - 3x^2 + 2x + 2) \cdot e^x$

b)

$f'(x) = 2e^x = f''(x)$

$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2)$

$g''(x) = e^x \cdot (2x + x^2) + e^x \cdot (2 + 2x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$

c)

$\int 3e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}e^{2x} + C$

$\int \frac{1}{2} \cdot e^{x+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x+1} + C$

Aufgabe 2

$3e = \int_0^2 e^{0,5x} + c$

$= [2e^{0,5x} + cx]_0^2$

$3e = 2e + 2c - 2$

$\rightarrow 1e = 2c - 2$

$\rightarrow 2c = 1e + 2$

$\rightarrow c = 0.5e + 1$

Aufgabe 3

Tangentengleichung: $y_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Beliebige Tangente der Stelle x_0 von $f(x) = e^x$

$y_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

mit $f(x_0) = e^{x_0}$ und $f'(x_0) = e^{x_0}$

$y_t(x) = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$

Schnittpunkt der Tangente bei $y_t(x) = 0$

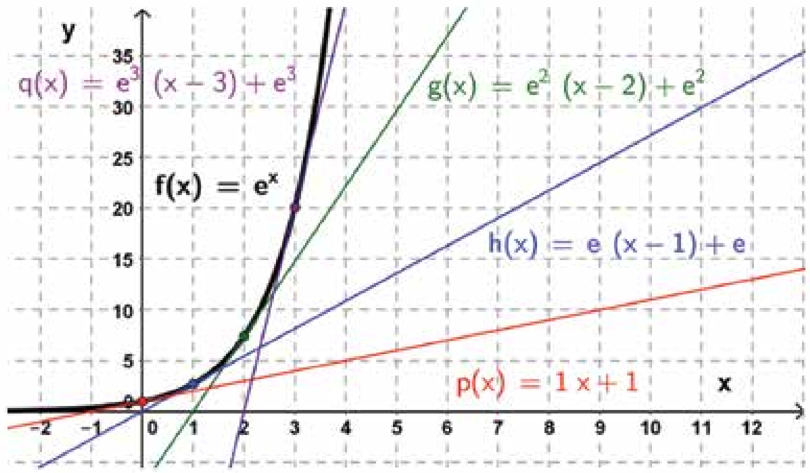
$0 = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$

$-e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$

$-1 = x - x_0$

$x = x_0 - 1$

Setzt man nun verschiedene Tangenten an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ und $x_0 = 3$, so lassen sich diese und ihre Nullstellen graphisch darstellen.



Arbeitsblatt 04: Natürliche Logarithmusfunktion

Aufgabe 1

a) $f'(x) = \frac{1}{4(\frac{1}{4}x+4)} = \frac{1}{x+16}$ und $g'(x) = 2x \cdot \ln(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}$ und $g'(x) = \ln(x^2) + x \cdot \frac{2x}{x^2} = \ln(x^2) + 2$

c) $f''(x) = -\frac{4}{x^2}$ und $g''(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

d) $F(x) = \frac{\ln(7-4x)}{-2} + C$ und $F(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{2} + C$

Aufgabe 2

$f(x) = a \cdot \ln(bx + c)$

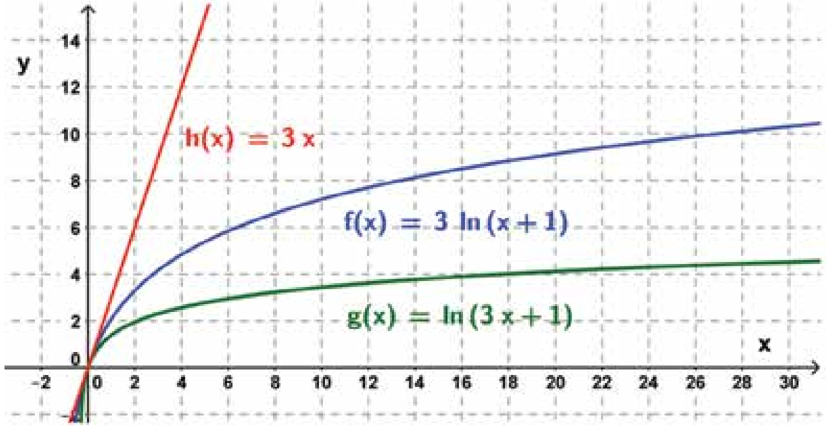
$f'(x) = \frac{ab}{bx + c}$

$f'(0) = 3 = \frac{ab}{0 + 1}$

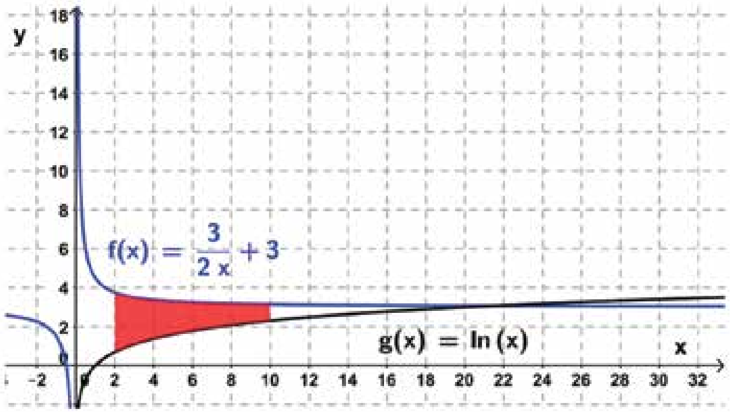
$\rightarrow \quad ab = 3$

Eine beliebige Kombination ist möglich. Die einfachsten Varianten sind, wenn ein Parameter gleich 1 gesetzt wird.

$f(x) = \ln(3x+1)$ oder $g(x) = 3\ln(x+1)$



Aufgabe 3



$$A = \int_2^{10} f(x)dx - \int_2^{10} g(x)dx$$

$$= \int_2^{10} \frac{3}{2x} + 3dx - \int_2^{10} \ln(x)dx$$

$$= \left[3\frac{\ln(|x|)}{2} + 3x\right]_2^{10} - [x \cdot \ln(x) - x]_2^{10}$$

$$= \left[3\frac{\ln(10)}{2} + 30 - 3\frac{\ln(2)}{2} - 6\right] - [10\ln(10) - 10 - 2\ln(2) + 2]$$

$$= 26{,}4142 - 13{,}64 = 12{,}7742$$

Arbeitsblatt 05: Gleichungen und Funktionen mit beliebigen Basen

Aufgabe 1

a) -6

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 6$

c) $3 \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(4)}$

d) $4 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{8}\right) + 8\right) = 4\ln\left(\frac{1}{8}\right) + 32 \approx 23{,}682$

e) $e^{\ln(3)\cdot(x-2)} - e^{\ln(2)\cdot x} = 0$

$\ln(3)\cdot(x-2) = \ln(2)\cdot x \quad \rightarrow \quad x = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} \approx 5{,}419$

f) $e^x\left(2e^{x-1} - 7\right) = 0$

$2e^{x-1} - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \ln(7) - \ln(2) + 1 \approx 2{,}253$

Aufgabe 2

Krümmung:

$f(x) = x^2 \cdot 2^{2x} = x^2 \cdot e^{\ln(2)2x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{\ln(2)2x} + x^2 \cdot \ln(2) \cdot 2 \cdot e^{\ln(2)2x} = (2x + 2\ln(2)x^2) \cdot e^{\ln(2)2x}$

$f''(x) = (2 + 4\ln(2)x) \cdot e^{\ln(2)2x} + 2\ln(2) \cdot (2x + 2\ln(2)x^2) \cdot e^{\ln(2)2x}$

$= (4\ln^2(2)x^2 + 8\ln(2)x + 2)e^{\ln(2)2x}$

$f''(2) = (16\ln^2(2) + 16\ln(2) + 2)e^{4\ln(2)} = 332{,}44$

⇨ **Linkskrümmung, weil f''(2) < 0**

Integral:

$g(x) = 2^{4x} = e^{\ln(2)4x}$

$G(x) = \frac{1}{4\ln(2)}e^{\ln(2)4x}$

$$A = \int_0^2 (4\ln^2(2)x^2 + 8\ln(2)x + 2)e^{\ln(2)2x}dx - \int_0^2 e^{\ln(2)4x}$$

$$= [(2\ln(2)x^2 + 2x)e^{\ln(2)2x}]_0^2 - \left[\frac{1}{4\ln(2)}e^{\ln(2)4x}\right]_0^2$$

$$= (8\ln(2) + 4)e^{4\ln(2)} - \left[\frac{1}{4\ln(2)}e^{8\ln(2)} - \frac{1}{4\ln(2)}\right]$$

$$= 60{,}75$$

Aufgabe 3

$f(x) = a \cdot c^x = e^x$

$a \cdot c^x = a \cdot e^{\ln(c)x} = e^x \qquad |: e^x$

$a \cdot e^{\ln(c)x-x} = 1$

$a = 1/e^{x\cdot(\ln(c)-1)}$

$f(x) = \frac{1}{e^{x(\ln(c)-1)}} \cdot e^{\ln(c)x} = \frac{1}{e^{\ln(c)x} \cdot e^{-x}} \cdot e^{\ln(c)x} = e^x$

Arbeitsblatt 06: Exponential- und Logarithmusfunktionen untersuchen

Aufgabe 1

Globalverhalten für $x \to \pm\infty$

$f(+\infty) = -3(\infty - 3)(\infty + 4)e^{0,5\infty-2} = -\infty^2 e^{0,5\infty-2} \to -\infty$

$f(-\infty) = -3(-\infty - 3)(-\infty + 4)e^{-0,5\infty-2} = -\infty^2 \cdot 0 \to 0$

Nullstellen

$f(x) = -3(x-3)(x+4)e^{0,5x-2} = 0$

$x_{01} = 3 \qquad x_{02} = -4$

Ableitungen

$f(x) = -3(x-3)(x+4)e^{0,5x-2} = -3(x^2 + x - 12)e^{0,5x-2}$

$f'(x) = -3(2x+1)e^{0,5x-2} - 1,5(x^2 + x - 12)e^{0,5x-2}$

$= (-1,5x^2 - 7,5x + 15)e^{0,5x-2}$

$f''(x) = (-3x - 7,5)e^{0,5x-2} + 0,5(-1,5x^2 - 7,5x + 15)e^{0,5x-2}$

Extremstellen

$f'(x) = (-1,5x^2 - 7,5x + 15)e^{0,5x-2} = 0$

$x_{E1} \approx 1,53 \qquad x_{E2} \approx -6,53$

$f''(x_{E1}) \approx -3,514$ Maximum

$f''(x_{E2}) \approx 0,0625$ Minimum

$f(x_{E1}) \approx 7,09$

$f(x_{E2}) \approx -0,374$

Wendestellen

$f''(x) = (-0,75x^2 - 6,75x)e^{0,5x-2} = 0$

$x_{WP1} = 0 \qquad x_{WP2} = -9$

$f(x_{WP1}) \approx 4,872$

$f(x_{WP2}) \approx -0,27$

Aufgabe 2

Globalverhalten:

$f(\infty) \to 0$

$f(\infty) = a(\infty^2 + b\infty - c)e^{d\infty}$

Die e-Funktion e^x hat für $x < 0$ eine Asymptote gegen Null. Daher muss der Parameter $d < 0$ sein.

$f(-\infty) \to -\infty$

$f(-\infty) = a(\infty^2 - b\infty - c)e^{-d\infty}$

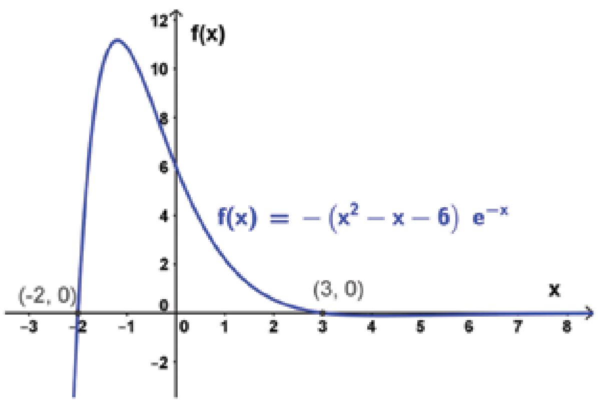
Der Term der e-Funktion wird positiv, da $d < 0$ gilt. Die Funktion wird nur dann negativ für $x \to -\infty$, wenn $a < 0$.

Um die beiden Nullstellen zu bestimmen, kann eine Linearfaktorzerlegung verwendet werden.

$f(x) = a(x-3)(x-(-2))e^{dx} = a(x^2 - x - 6)e^{dx}$

Die Parameter können nun vereinfacht angenommen werden als z.B. a = -1 und d = -1.

$f(x) = -(x^2 - x - 6)e^{-x}$



Aufgabe 3

Globalverhalten

$f(+\infty) = 2\frac{\ln(2\infty+1)}{(2\infty+1)}$

Die lineare Funktion im Nenner ist dominanter als die Logarithmusfunktion, weshalb die Funktion eine Asymptote gegen Null besitzt.
Die Logarithmusfunktion ist nur für x > -0,5 definiert. Dort besitzt sie jedoch zusätzlich auch eine Polstelle und sie verläuft gegen -∞.

Nullstellen

$f(x) = 2\frac{\ln(2\infty+1)}{(2\infty+1)} = 0$

$x_0 = 0$

Ableitungen

$f(x) = 2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)}$

$f'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2} - \frac{4\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = -\frac{4(\ln(2x+1)-1)}{(2x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{16(\ln(2x+1)-1)}{(2x+1)^3} - \frac{8}{(2x+1)^3} = \frac{8(2\ln(2x+1)-3)}{(2x+1)^3}$

Extrempunkte

$f'(x) = -\frac{4(\ln(2x+1)-1)}{(2x+1)^2} = 0$

$x_E = \frac{e-1}{2}$

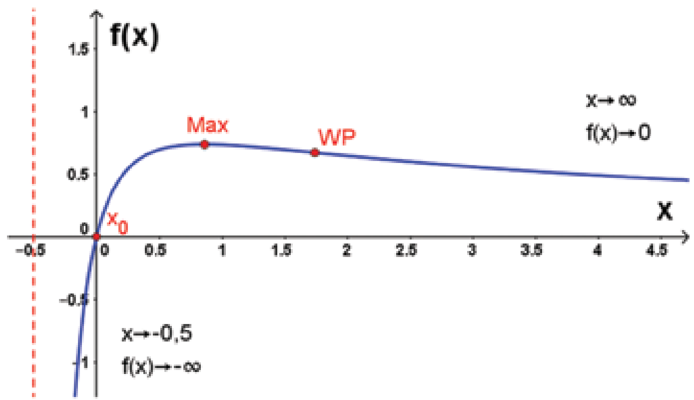
$f(x_E) = \frac{2}{e} \approx 0{,}736$

Wendepunkte

$f''(x) = \frac{8(2\ln(2x+1)-3)}{(2x+1)^3} = 0$

$x_{WP} = \frac{e^{\frac{3}{2}}-1}{2}$

$f(x_{WP}) = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}} \approx 0{,}6694$



Arbeitsblatt 07: Halbwerts- und Verdopplungszeit

Aufgabe 1

$f(x) = c \cdot a^x$

$40000 = 100 \cdot a^2$ => $a = 20$

$f(x) = 100 \cdot 20^x = 100e^{\ln(20)x}$

$T_V = \frac{\ln(2)}{\ln(20)} \approx 0{,}23\text{ h} \approx 14\text{ min}$

Aufgabe 2

a) Entweder:

$4 = -\frac{\ln(2)}{k} \rightarrow k = -\frac{\ln(2)}{4} \approx -0{,}173$

Oder:

$m(4) = \frac{1}{2}m(0)$

$\rightarrow\ 300 \cdot e^{4k} = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot e^{0k}$

$\rightarrow\ e^{4k} = \frac{1}{2}\ \rightarrow\ k = -\frac{\ln(2)}{4} \approx -0{,}173$

b)

$m(24) = 300 \cdot e^{-0{,}173 \cdot 24} \approx 4{,}72$

Zerfallene Masse: $m_{Zerfall} = m_{Anfang} - m_{Ende} = 300 - 4{,}72 = 295{,}28$

Nach einem Tag sind bereits 295,28 mg zerfallen.

c)

$m(n \cdot T_H) = 300 \cdot e^{k \cdot n \cdot T_H}$ mit $T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$

$= 300 \cdot e^{k \cdot n \cdot -\frac{\ln(2)}{k}}$

$= 300 \cdot e^{-n \cdot \ln(2)}$

$= 300 \cdot 2^{-n}$

$= 300 \cdot \frac{1}{2^n}$

Bei einem Vielfachen n der Halbwertszeit wird der Anfangsbestand n mal halbiert.

Aufgabe 3

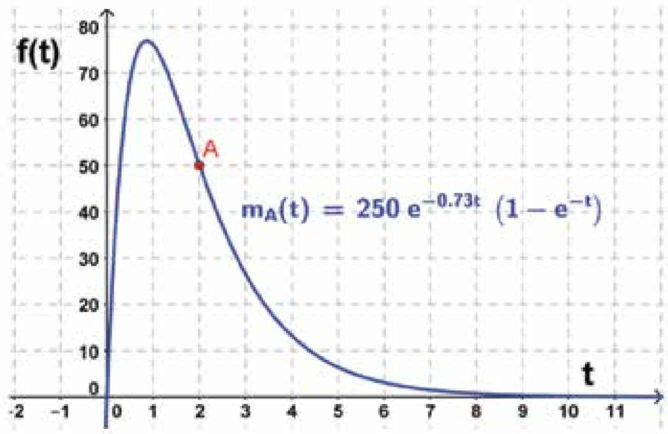
a)

$m_A(0) = 250e^0(1 - e^0) = 250(1 - 1) = 0$

b)

$m_A(2) = 250e^{2k}(1 - e^{-2}) = 50$

c)



Maximum:

$m_A(t) = 250e^{kt}(1 - e^{-t}) = 250e^{kt} - 250e^{t(k-1)}$

$m_A'(t) = 250 \cdot k \cdot e^{kt} - 250 \cdot (k-1) \cdot e^{t(k-1)} = 0$

$250(k-1)e^{t(k-1)} = 250ke^{kt} \quad |:250\ |:e^{kt}\ \ |:(k-1)$

$\frac{e^{t(k-1)}}{e^{kt}} = \frac{k}{k-1}$

$e^{t(k-1)-kt} = \frac{k}{k-1}$

$e^{-t} = \frac{k}{k-1} \quad |\ (...)^{-1} \qquad |\ \ln(\ldots)$

$t = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(\frac{-1{,}73}{-0{,}73}\right) \approx 0{,}863$

Nach 0,863 Stunden ist die maximale Menge an Substanz A vorhanden.

Substanz A entsteht erst bei dem Zerfallsprozess eines anderen Materials. Da es sich bei A allerdings auch um eine radioaktive Substanz handelt, zerfällt diese selbst und verschwindet deshalb auf lange Zeit gesehen auch wieder.

Klasse 11,2 - Oberthema D

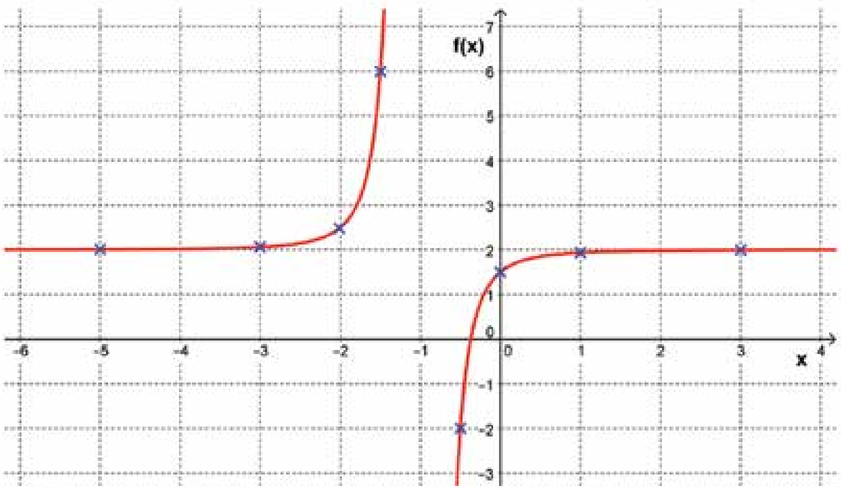
Gebrochenrationale und trigonometrische Funktionen

Arbeitsblatt 01: Gebrochenrationale Funktionen - Verschiebung

Aufgabe 1

x	-5	-3	-2	-1,5	-0,5	0	1	3
f(x)	2,01	2,06	2,5	6	-2	1,5	1,94	1,99

das asymptotische Verhalten der Funktion ist bereits an den Funktionswerten erkennbar, offensichtlich ist auch, dass die Funktion zwischen -1,5 und -0,5 nach oben und nach unten „wegzieht“. Hier befindet sich dementsprechend die Polstelle.



Aufgabe 2

$g(x) = 0.5\, x^{-1} - 1$

$h(x) = (x + 3)^{-2} - 2$

$j(x) = -2\,(x - 2)^{-2} - 0.5$

$k(x) = -0.2\,(x - 2)^{-1} + 0.5$

Aufgabe 3

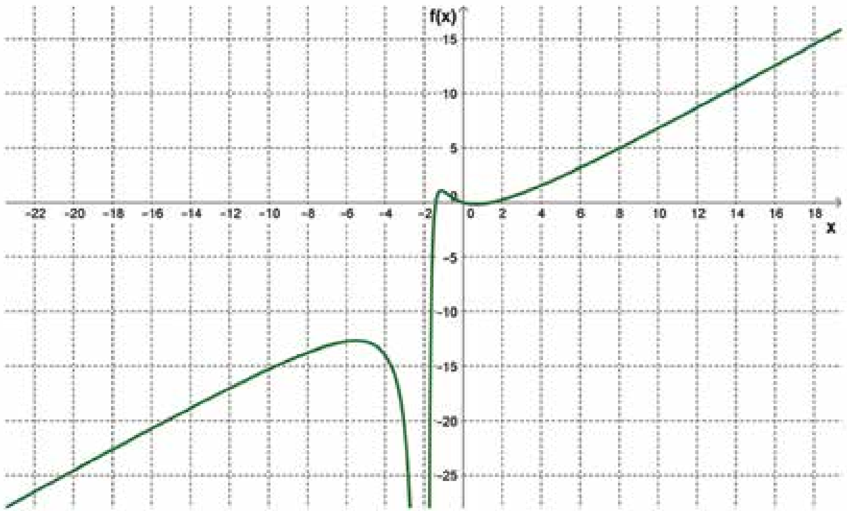
Beide Funktionen sind punktsymmetrisch, da es sich um Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten handelt (egal, ob positiver oder negativer Exponent).

Der Symmetriepunkt S_f von f(x) liegt am Sattelpunkt $S_f(3|2)$ und der Symmetriepunkt S_g von g(x) liegt bei $S_g(-2|-1)$ (← das wiederum ist aber natürlich kein Sattelpunkt, sondern die Polstelle).

Die Verschiebung des Symmetriepunkts muss die neuen Koordinaten $S_g^*(3|2)$ haben. Hierfür also die Funktion g(x) anpassen: $g^*(x) = \frac{1}{x-3} + 2$

Arbeitsblatt 02: Gebrochenrationale Funktionen - Eigenschaften

Aufgabe 1



Polstelle: $x_{Pol} = -2$

Nullstellen: $0 = x^3 - 2x \rightarrow \quad 0 = x(x^2 - 2) \qquad x_{01} = 0 \qquad x_{02} = +\sqrt{2} \qquad x_{03} = -\sqrt{2}$

Asymptote: $y = x - 4$ (Polynomdivision)

Aufgabe 2

a) $y = 3x$ (Fall 3a)

b) $y = -1$ (Fall 2)

c) $f(x) = \frac{(x-2)^3(1+x)^2}{x^3-2x^2} = \frac{x^5-4x^4+x^3+10x^2-4x-8}{x^3-2x^2}$ (Fall 3b) → $y = x^2 - 2x - 3$

Aufgabe 3

Zunächst den Nenner der gebrochenrationalen Funktion festlegen: (x - 2)

Asymptote als Gerade: Fall 3a; im einfachsten Fall ist Nennergrad gleich 1 und Zählergrad demnach 2

Für Zähler aufstellen: $ax^2 + bx + c$

Aus Polynomdivision ergibt sich für a = 0,5 und b = -4, c ist beliebig

$$f(x) = \frac{0{,}5x^2 - 4x}{(x-2)}$$

Arbeitsblatt 03: Gebrochenrationale Funktionen analysieren

Aufgabe 1

Asymptote (Polynomdivision) : $y = x$

Polstellen (Nenner betrachten): $x_{Pol1,2} = \pm 2$

Nullstellen (Zähler betrachten): $0 = x_{Nst}^3 - x_{Nst} \rightarrow 0 = x_{Nst} \cdot (x_{Nst}^2 - 1)$

$x_{Nst1} = 0 \qquad x_{Nst2,3} = \pm 1$

Extremstellen: $f'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2-4)-(x^3-x)\cdot 2x}{x^4-8x^2+16} = \frac{3x^4-12x^2-x^2+4-2x^4+2x^2}{x^4-8x^2+16} = \frac{x^4-11x^2+4}{x^4-8x^2+16}$

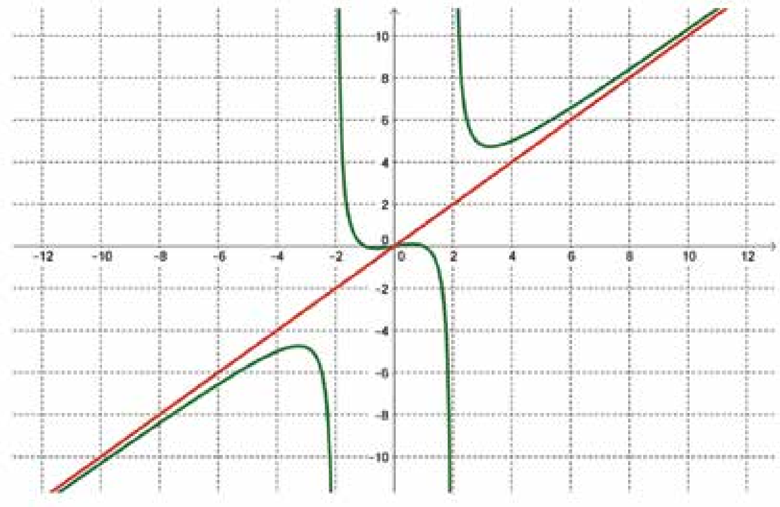
Nullstellen d. Abl.: $0 = x_E^4 - 11x_E^2 + 4$ → Substitution $0 = z^2 - 11z + 4$

p-q-Formel: $z_{1,2} = 5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 - 4}$

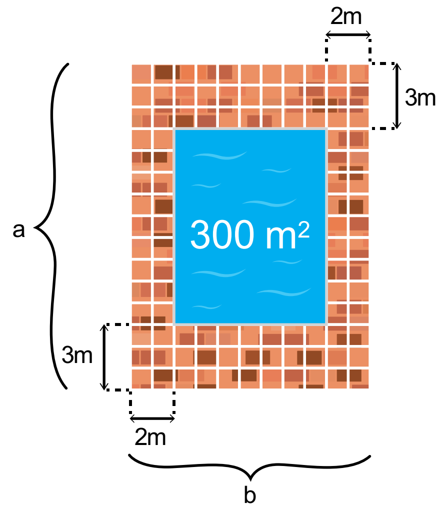
$z_1 = 10{,}62 \qquad z_2 = 0{,}38$

Resubstitution: $x_{E1,2} = \pm\sqrt{10{,}62} = \pm 3{,}26 \qquad x_{E3,4} = \pm\sqrt{0{,}38} = \pm 0{,}62$

Ortskurve: keine, da kein Parameter



Aufgabe 2



$G = a \cdot b \qquad 300 = (a-6)(b-4)$

$b = \frac{300}{a-6} + 4 = \frac{300}{a-6} + \frac{4(a-6)}{a-6} = \frac{276+4a}{a-6}$

$$G(a) = a \cdot \frac{276+4a}{a-6} = \frac{276a+4a^2}{a-6}$$

$$G'(a) = \frac{(276+8a)(a-6)-(276a+4a^2)}{a^2-12a+36} = \frac{4a^2-48a-1656}{a^2-12a+36}$$

Minimum als Nullstelle d. Abl. (Zähler betrachten): $0 = 4a^2 - 48a - 1656$

$0 = a^2 - 12a - 414$

p-q-Formel: $a_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 + 414} = 6 \pm 21{,}21$

nur positive Lösung möglich: $a = 27{,}21 \quad \rightarrow \quad b = 18{,}14$

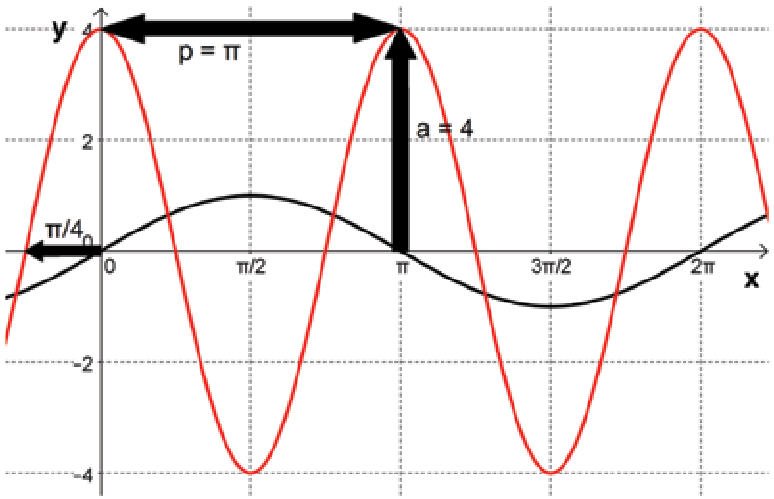
Aufgabe 3

Ob eine Asymptote von oben oder von unten angenähert wird, lässt sich an dem Rest der Polynomdivision erkennen. Da der vordere Teil der Asymptotengleichung entspricht, kann man je nach Vorzeichen des Rests entscheiden, ob die Funktion von unten (negatives Vorzeichen) angenähert wird, weil ein minimal kleiner Betrag von der Asymptote subtrahiert wird, oder ob sie von oben angenähert wird (positives Vorzeichen). Da es sich auch hier um ein Grenzverhalten handelt, setzt man also x → +∞ und x → -∞ ein und ermittelt so das Vorzeichen des Restquotienten.

$$(x^2+1) : (x-3) = x + 3 + \underbrace{\frac{10}{x-3}}_{\text{Rest}}$$
$$\begin{array}{l} -(x^2-3x) \\ \hline \quad 3x+1 \\ \quad -(3x-9) \\ \hline \qquad 10 \end{array}$$

Arbeitsblatt 04: Sinusfunktion - Amplituden, Perioden und Verschiebung

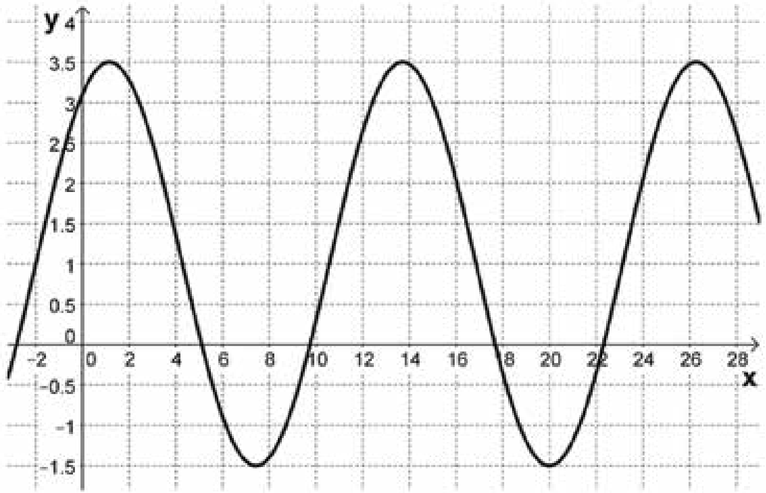
Aufgabe 1



Aufgabe 2

f(x) = 2,5 · sin(x - π)
g(x) = 0,5 · sin(1,5x) + 1
h(x) = sin(0,5x - 0,5 π)

Aufgabe 3



Arbeitsblatt 05: Modellierung und Anwendung trigonometrischer Funktionen

Aufgabe 1

$$\omega = \frac{2\pi}{5\,\text{min}} = 1{,}26\frac{1}{\text{min}}$$

$$h(t) = 15\,\text{m} \cdot \sin\left(1{,}26\,\frac{1}{\text{min}} \cdot t\right) + 16{,}5\,\text{m}$$

Aufgabe 2

Zunächst Punkte in Koordinatensystem eintragen.

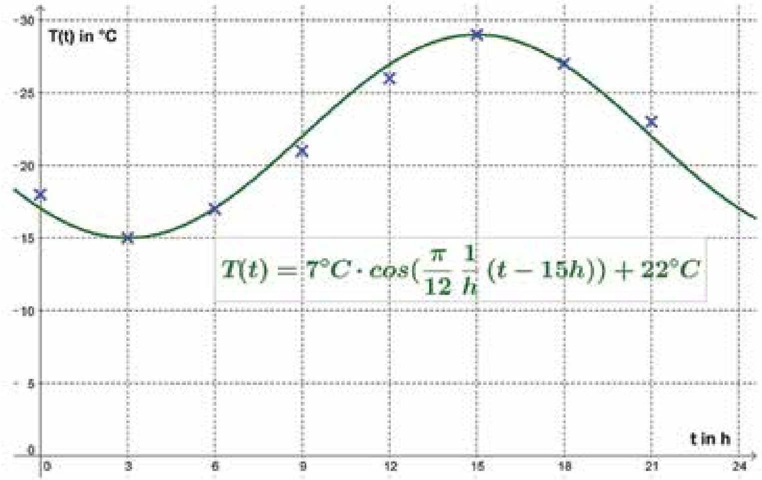
Amplitude: $\frac{\text{Maximum}-\text{Minimum}}{2} = \frac{29°C-15°C}{2} = 7°C \quad \rightarrow \quad a = 7°C$

Verschiebung in y-Richtung: $\text{Min} + \text{Amplitude} = 15°C + 7°C = 22°C \quad \rightarrow \quad d = 22°C$

Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24h} = \frac{\pi}{12}\,{}^1/_h$

Verschiebung in x-Richtung: Verschiedene Ansätze möglich; Ansatz über Höchsttemperatur in Verknüpfung mit allgemeiner Kosinusfunktion erscheint am einfachsten: $t_0 = 15h$

$$T(t) = 7°C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\ {}^{1}/_{h}\ (t - 15h)\right) + 22°C$$



Hinweis: Mit einer richtigen Regression im Taschenrechner kann man die Messwerte noch besser fitten, aber als ersten Versuch ist die Funktion schon gut geeignet.

Aufgabe 3

$$\omega = \frac{2\pi}{365\ \text{Tage}} = 0{,}0172 \frac{1}{\text{Tage}}$$

$$f(t) = 23{,}5° \cdot \sin\left(0{,}0172 \frac{1}{\text{Tage}} \cdot (t - 79\ \text{Tage}\right)$$

Arbeitsblatt 06: Untersuchungen an trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1

$f'(x) = -\frac{3}{2}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ Ableitung zur Bestimmung der maximalen Steigung

folgende Gedanken vorweg:

maximale (positive) Steigung ist gefragt, also nur die Hochpunkte der Ableitung; normale Sinusfunktion hat in dem Intervall [-2π; 2π] zwei Hochpunkte bei $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{3\pi}{2}$; für minus Sinus gelten die gleichen Stellen mit umgekehrten Vorzeichen, also $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$; wichtig: die neue Periodenlänge beträgt $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Nun den Ausdruck im Inneren des Sinus' $\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ mit den genannten Stellen gleichsetzen und nach x freistellen → $\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{x_1 = -1}$ und $\frac{\pi}{2}x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \mathbf{x_2 = 3}$

Da die Periodenlänge verkürzt ist, muss noch überprüft werden, ob ein weiterer Hochpunkt im Intervall auftaucht. Hierfür die bestimmten Stellen um eine Periodenlänge „erweitern":

Im Positiven läge der nächste Hochpunkt bei x_{2+1} = 3 + 4 = 7 > 2π und ist somit außerhalb.

Im Negativen läge der nächste Hochpunkt bei x_{1-1} = -1 - 4 = -5 > -2π und somit innerhalb.

Daraus folgen drei Hochpunkte: $\mathbf{x_1 = -1}$ $\mathbf{x_2 = 3}$ $\mathbf{x_{1\text{-}1} = x_3 = -5}$

Aufgabe 2

Der Zusammenhang (sin α)² + (cos α)² soll stets gleich 1 und somit konstant sein. Das bedeutet, dass man beim Ableiten nach α genau 0 als Ergebnis bekommen muss (da es ja keine Änderung des Funktionswertes gibt).

Daher:

$$\frac{d}{d\alpha}((\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 3

$$5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) + d\,dx = [-\cos(x) + dx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$5 = -\cos(\pi) + \pi d + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}d \qquad 5 = 1 + \frac{\pi}{2}d \quad \rightarrow \quad \mathbf{d = \frac{8}{\pi}}$$

Klasse 11,2 - Oberthema E

Integralrechnung 2

Arbeitsblatt 01: Rauminhalte von Rotationskörper

Aufgabe 1

$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}5\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}25\right) dx = \pi \cdot \left[-e^{-x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}25x\right]_{-4}^{4}$$

$$V = \pi \cdot \left(\left(-e^{-4} - 2e^{-\frac{1}{2}4} + 0{,}25 \cdot 4\right) - \left(-e^{-(-4)} - 2e^{-\frac{1}{2}(-4)} + 0{,}25 \cdot (-4)\right)\right)$$

$$V = \pi \cdot \left((-e^{-4} - 2e^{-2} + 1) - (-e^{4} - 2e^{2} - 1)\right) = \pi \cdot (-e^{-4} - 2e^{-2} + e^{4} + 2e^{2} + 2) \approx 223{,}33$$

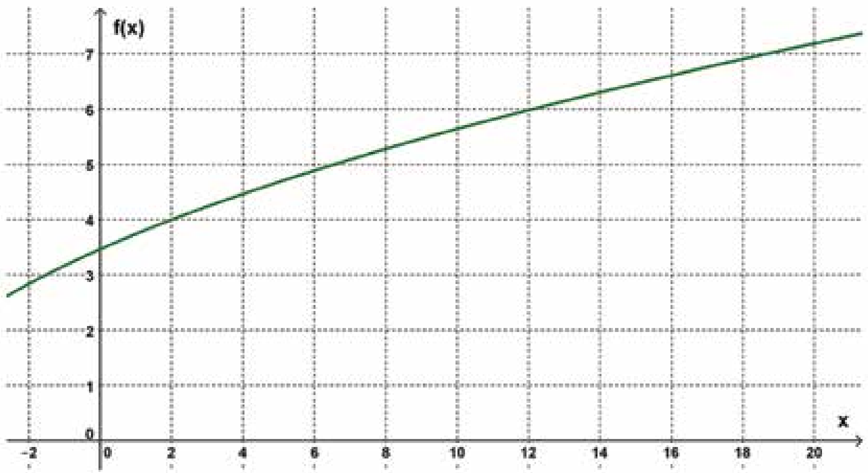
Aufgabe 2

a)

$$V = 2000\ \text{cm}^3 = \pi \cdot \int_0^{20} \left(\sqrt{qx + 12}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{20} qx + 12\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}qx^2 + 12x\right]_0^{20}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot 20^2 + 12 \cdot 20\right)$$

$$2000 = \pi \cdot (200q + 240) \quad \rightarrow \quad \mathbf{q = 1{,}98}$$



b)

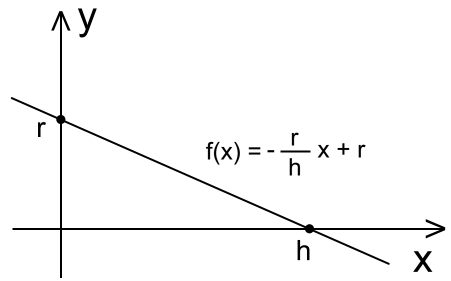
Formel für die Oberfläche erstellen, analog zum Volumen auf die Kreisformeln zurückgreifen; Oberfläche entspricht den über die Höhe der Vase aufsummierten Umfängen, also das Integral der „Umfangsfunktion“:

$$O = 2\pi \cdot \int_0^{20} \sqrt{1{,}98x + 12}\, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{1{,}98} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1{,}98x + 12)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{20} = 696{,}21$$

Die Stammfunktion ist vielleicht nicht ganz leicht zu bestimmen. Dafür muss man evtl. schon die folgenden Kapitel zu Integrationsregeln bearbeiten. Mit ein bisschen ausprobieren und nachdenken, sollte es jedoch möglich sein, auch so auf das Ergebnis zu kommen.

Aufgabe 3

Kegel als Rotationskörper lässt sich durch eine Gerade beschreiben wie folgt:



$$V = \pi \cdot \int_0^{h} \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{h} \frac{r^2}{h^2}x^2 - \frac{2r^2}{h}x + r^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}x^3 - \frac{r^2}{h}x^2 + r^2x\right]_0^{h}$$

$$V = \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}h^3 - \frac{r^2}{h}h^2 + r^2h\right) - 0\right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}r^2h - r^2h + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{q.e.d.}$$

Arbeitsblatt 02: Mittelwerte von Funktionen

Aufgabe 1

$$\overline{m} = 4 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} 2t^2 - 4t + 1\, dt = \frac{1}{t_2 - 0}\int_0^{t_2} 2t^2 - 4t + 1\, dt = \frac{1}{t_2}\left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t\right]_0^{t_2}$$

$$= \frac{1}{t_2}\left(\left(\frac{2}{3}t_2^3 - 2t_2^2 + t_2\right) - 0\right) = \frac{2}{3}t_2^2 - 2t_2 + 1$$

$$4 = \frac{2}{3}t_2^2 - 2t_2 + 1 \quad \rightarrow \quad 0 = t_2^2 - 3t_2 - 4{,}5 \quad \rightarrow t_2 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4{,}5}$$

nur ein positiver Wert für t_2 ist möglich: **t_2 = 4,1** (in Sekunden)

Aufgabe 2

a) $\overline{m} = 3$

b) der Mittelwert wird größer; $\overline{m} > 3$

c) wenn A_1 kleiner als A_2 , dann wird der Mittelwert definitiv kleiner als 3. Da bekannt ist, dass die Fläche A_1 um $\frac{13}{4}$ kleiner wird (somit auch das Integral in der Mittelwert-Formel), können wir von dem Mittelwert $\overline{m} = 3$ Folgendes subtrahieren:

$$\overline{m} = 3 - \frac{\frac{13}{4}}{6{,}5} = 3 - \frac{2}{4} = 2{,}5$$

Die Minderung des Integrals muss auf die gesamte betrachtete Intervallbreite 6,5 umgelegt werden (von a = 1 bis b = 7,5). Somit reduziert sich der Mittelwert um 0,5.

Arbeitsblatt 03: Uneigentliche Integrale

Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^3 -3\,e^x dx = \lim\limits_{a \to -\infty} [-3e^x]_a^3 = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(-3 \cdot e^3 + 3 \cdot e^a\right) = -3e^3$

b) $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b 2\sqrt{x}\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^b = \lim\limits_{b \to \infty} \left(\frac{4}{3} \cdot b^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) = \infty$

c) $\lim\limits_{a \to 0} \int_a^5 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \lim\limits_{a \to 0} \left[-\frac{1}{6}x^3 - \sqrt{x}\right]_a^3 = \lim\limits_{a \to 0} \left(-\frac{1}{6} \cdot 3^3 - \sqrt{3} + \frac{1}{6}a^3 + \sqrt{a}\right) = -6{,}232$

Aufgabe 2

$$4 = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{qx^3}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2qx^2}\right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2qb^2} + \frac{1}{2q \cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2q} \quad \to \quad q = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{8}{x^3}\, dx = 4$$

Aufgabe 3

Zwei Erklärungsansätze: nach den Regeln des Integrierens oder durch „Logik"/Reihen

Integrieren: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_1^{+\infty} = \infty$ aber: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$

Hierbei muss einem lediglich die Stammfunktion für $\frac{1}{x}$ bekannt sein und die Tatsache, dass der natürliche Logarithmus (als Umkehrfunktion der e-Funktion) monoton steigt. Somit ist unmittelbar erwiesen, dass es sich nur bei $\frac{1}{x^2}$ um ein uneigentliches Integral handelt.

Logik/Reihen:

Ähnlich wie bei der vorgerechneten Beispielaufgabe zu diesem Kapitel, muss man hier die Fortsetzung/Aufsummierung betrachten. In beiden Fällen werden zwar die Funktionswerte kleiner, jedoch kann man mit folgendem Ansatz zeigen, dass $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ nicht konvergiert und somit kein uneigentliches Integral ist:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + > \left(\frac{1}{2}\right) \quad + \quad > \left(\frac{1}{2}\right) \quad + \ldots$$

Für $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ haben wir bereits in der Beispielaufgabe gezeigt, dass ein uneigentliches Integral vorliegt (dies ist nämlich unabhängig vom Faktor 3).

Arbeitsblatt 04: Produktintegration - Partielle Integrale

Aufgabe 1

a) $\int_{-3}^{-1} -3x \cdot e^x\, dx = [-3x \cdot e^x]_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} -3e^x\, dx = \frac{3}{e} - \frac{9}{e^3} - [-3e^x]_{-3}^{-1} = \frac{3}{e} - \frac{9}{e^3} + \frac{3}{e} - \frac{3}{e^3} = \frac{6}{e} - \frac{12}{e^3}$

b) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(4 - \frac{x}{4}\right) \cdot \cos(x)\, dx = \left[\left(4 - \frac{x}{4}\right) \cdot \sin(x)\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \sin(x)\, dx = -4 + \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4} + \frac{3\pi}{8}$

c) $\int_1^3 \left(2x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\right) dx = \left[x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\right]_1^3 - \int_1^3 x^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \frac{-1}{x^2}\, dx = 4 + 2\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot dx =$

$$= 4 + 2 \cdot [\ln(x) - x]_1^3 = 4 + 2 \cdot (\ln(3) - 3 - \ln(1) + 1) = 2 \cdot \ln(3)$$

Aufgabe 2

a) $\int_0^{\pi} 3x^2 \cdot \sin(x)\, dx = \left[-3x^2 \cdot \cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -6x \cdot \cos(x)\, dx =$

$$= 3\pi^2 - \left([-6x \cdot \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -6\sin(x)\, dx\right) = 3\pi^2 + [6\cos(x)]_0^{\pi} = 3\pi^2 - 12$$

b) $\int_1^2 x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} dx = \left[x^2 \cdot 2e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_1^2 - \int_1^2 4x \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} dx = \left(8 - \frac{2}{\sqrt{e}}\right) - \left(\left[4x \cdot 2e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_1^2 - \int_1^2 8e^{\frac{1}{2}x-1} dx\right) =$

$= \left(8 - \frac{2}{\sqrt{e}}\right) - \left(16 - \frac{8}{\sqrt{e}}\right) - \left[16e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_1^2 = \left(8 - \frac{2}{\sqrt{e}}\right) - \left(16 - \frac{8}{\sqrt{e}}\right) - \left(16 - \frac{16}{\sqrt{e}}\right) = -24 + \frac{22}{\sqrt{e}}$

c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} \cdot (x^2-5)^3 dx = \left[-\frac{1}{3x^3}(x^2-5)^3\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\frac{1}{3x^3} \cdot 3(x^2-5)^2 \cdot 2x\, dx =$

$= \left(\frac{64}{3} + \frac{64}{3}\right) + \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2}(x^2-5)^2 dx = \frac{128}{3} + \left[\frac{-2}{x} \cdot (x^2-5)^2\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\frac{2}{x} \cdot 4x(x^2-5) dx$

$= \frac{128}{3} + (-32-32) + \left[\frac{8}{3}x^3 - 40x\right]_{-1}^1 = \frac{128}{3} - 64 + \frac{16}{3} - 80 = -144 + \frac{144}{3}$

Aufgabe 3

$$\int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx = [e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cdot \sin(x)\, dx =$$

$$= [e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - \left([-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cdot \cos(x)\, dx\right) =$$

$$= [e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - [-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Achtung, die Gleichung lautet jetzt (immer noch):

$$\int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx = [e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - [-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Wir sind also durch zweifache partielle Integration wieder beim Ausgangsintegral angelangt. Wir können diese Integrale jedoch zusammenfassen durch „Rüberziehen" auf die andere Seite:

$$2 \cdot \int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx = [e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - [-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx = \frac{[e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - [-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi}{2}$$

Dies ist die Lösung für das Integral. Jetzt können wir noch die Grenzen in die Stammfunktionen einsetzen:

$$\frac{[e^x \cdot \cos(x)]_0^\pi - [-e^x \cdot \sin(x)]_0^\pi}{2} = \frac{e^\pi \cdot \cos(\pi) - e^0 \cdot \cos(0) - 0}{2} = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi e^x \cdot \cos(x)\, dx = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Arbeitsblatt 05: Integration durch Substitution

Aufgabe 3

a) $\int_0^\pi 4x \cdot \cos(1+2x^2)\, dx \quad g(x) = 1 + 2x^2 \quad g'(x) = 4x$

$\int_{1+2\cdot 0^2}^{1+2\pi^2} \cos(z)\, dz = [\sin(z)]_1^{1+2\pi^2} = \sin(1+2\pi^2) - \sin(1) \approx 0{,}337$

b) $\int_{-1}^1 (x^2+1) \cdot e^{\frac{1}{3}x^3+x-4} dx \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 4 \quad g'(x) = x^2 + 1$

$\int_{\frac{1}{3}(-1)^3-1-4}^{\frac{1}{3}\cdot 1^3+1-4} e^z\, dz = [e^z]_{-\frac{16}{3}}^{-\frac{8}{3}} = e^{-\frac{8}{3}} - e^{-\frac{16}{3}} = 0{,}065$

c) $\int_2^4 (x - \frac{1}{2})\sqrt{x^2 - x}\, dx \quad g(x) = x^2 - x \quad g'(x) = 2x - 1$

$\int_{2^2-2}^{4^2-4} \frac{1}{2}\sqrt{z}\, dz = \left[\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_2^{12} = \frac{1}{3} \cdot 12^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 12{,}91$

Aufgabe 2

a) $\int_a^b \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad g(x) = 1 - x^2 \quad g'(x) = -2x$

$\int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = [2\sqrt{z}]_{g(a)}^{g(b)}$ Resubst.: $[2\sqrt{z}]_{g(a)}^{g(b)} = [2\sqrt{1-x^2}]_a^b$

b) $\int_p^q \frac{2x-x^3}{x^4-4x^2} dx \quad g(x) = x^4 - 4x^2 \quad g'(x) = 4x^3 - 8x = -8x + 4x^3$

$\int_{g(p)}^{g(q)} -\frac{1}{4z} dz = \left[-\frac{1}{4}\ln(z)\right]_{g(p)}^{g(q)}$ Resubst.: $\left[-\frac{1}{4}\ln(x^4 - 4x^2)\right]_p^q$

c) $\int_u^v (2-x) \cdot \sin(4x - x^2)\, dx \quad g(x) = 4x - x^2 \quad g'(x) = 4 - 2x$

$\int_{g(u)}^{g(v)} \frac{1}{2}\sin(z)\, dz = \left[-\frac{1}{2}\cos(z)\right]_{g(u)}^{g(v)}$ Resubst.: $\left[-\frac{1}{2}\cos(4x - x^2)\right]_u^v$

Lösungen


StrandMathe
Meer fürs Denken
Das Übungsheft
Oberstufe
Teil 3

Klasse 12,1 - Oberthema A

Vektorrechnung

Arbeitsblatt 01: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

$$\begin{array}{llllllll}
(I) & 25a & + & 5b & + & c & = & -3 \\
(II) & 36a & + & 6b & + & c & = & -8 \\
(III) & 6a & & & & & = & -6
\end{array}$$

In Matrixschreibweise sieht das LGS wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & -3 \\ 36 & 6 & 1 & -8 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

(III) $\quad 6a = -6 \quad \rightarrow \quad a = -1$

In Gleichung (II) eingesetzt:

(II) $\quad 36a + 6b + c = -8 \quad \rightarrow \quad 6b + c = 28 \quad \rightarrow \quad c = 28 - 6b$

In Gleichung (I) eingesetzt:

(I) $\quad 25a + 5b + c = -3 \quad \rightarrow \quad 3 - b = -3 \quad \rightarrow \quad b = 6$

$\quad c = 28 - 6b \quad \rightarrow \quad c = -8$

Eingesetzt in die allgemeine Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x) = -x^2 + 6x - 8$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-4x & - & 7y & + & 8z & = & -3 \\
2x & - & 4y & + & z & = & 9 \\
4x & + & 7y & - & 8z & = & 3
\end{array}$$

Es gibt unendlich Lösungen, da die Zeilen (I) und (III) dieselben sind mit unterschiedlichem Vorzeichen.

b) z = -2 y = 3 x = -1

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
10x & - & 5y & + & 5z & = & 20 \\
9x & + & 6y & - & 3z & = & 10 \\
20x & - & 10y & + & 10z & = & 10
\end{array}$$

Das LGS hat keine Lösung, da sich Zeile (I) und (III) widersprechen.

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(IV) $\quad -c + d = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1 + c$

(III) $\quad b + c + d = 9 \quad \rightarrow \quad b = 8 - 2c$

(II) $\quad a + b + c = 11 \quad \rightarrow \quad a = 3 + c$

(I) $\quad a + b + c + d = 14 \quad \rightarrow \quad c = 14 - 3 - c - 8 + 2c - 1 - c$

$c = 2cm \quad a = 5cm \quad b = 4cm \quad d = 3cm$

Arbeitsblatt 02: Gauß-Algorithmus

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -10 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | -2 \cdot I + II$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & -4 & -2 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 136 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | -3 \cdot I + IV$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & -4 & -2 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 136 \\ 3 \\ 207 \end{pmatrix} \quad | 1 \cdot III + IV$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & -4 & -2 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 136 \\ 3 \\ 210 \end{pmatrix}$$

Zeile IV: $\quad 42d = 210 \quad \rightarrow \quad d = 5$
Zeile III: $\quad 8c + 7d = 3 \quad \rightarrow \quad c = -4$
Zeile II: $\quad -4b - 2c + 28d = 136 \quad \rightarrow \quad b = 3$
Zeile I: $\quad 1a + 4c - 10d = -68 \quad \rightarrow \quad a = -2$

Aufgabe 2

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}200 & 120 & 80 & 14600\\300 & 200 & 170 & 25700\\150 & 150 & 75 & 14250\end{array}\right) \quad |-1{,}5\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}'\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}200 & 120 & 80 & 14600\\0 & 20 & 50 & 3800\\150 & 150 & 75 & 14250\end{array}\right) \quad |-0{,}75\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}'\\\mathrm{III}'\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}200 & 120 & 80 & 14600\\0 & 20 & 50 & 3800\\0 & 60 & 15 & 3300\end{array}\right) \quad |-3\cdot\mathrm{II}'+\mathrm{III}'$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}'\\\mathrm{III}''\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}200 & 120 & 80 & 14600\\0 & 20 & 50 & 3800\\0 & 0 & -135 & -8100\end{array}\right)$$

Zeile III“:	$-135C=-8100$	$\rightarrow$	$C=60$
Zeile II‘:	$20B+50C=3800$	$\rightarrow$	$B=40$
Zeile I:	$200A+120B+80C=14600$	$\rightarrow$	$A=25$

Modell C wurde 60 Mal gebaut, Modell B 40 Mal und Modell A 25 Mal.

Aufgabe 3

a) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\4 & 6 & 0\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\12\end{pmatrix}$

Hier kann die Lösung direkt abgelesen werden, eine untere linke Dreiecksmatrix ist gleichwertig zu einer oberen rechten.

b) $\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\0 & 0 & 12\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\\17\end{pmatrix}$ Spalte i und ii tauschen, dabei zugehörige Variablen tauschen

$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\0 & 0 & 12\\-2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\\17\end{pmatrix}$ Zeile II und III tauschen

$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{III}\\\mathrm{II}\end{array}\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\-2 & 1 & 3\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\17\\-2\end{pmatrix}$ Zeile III und I tauschen

$\begin{array}{c}\mathrm{III}\\\mathrm{I}\\\mathrm{II}\end{array}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\10\\-2\end{pmatrix}$

c) $\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & 3 & 12\\5 & 0 & -4 & -12\\-7 & 6 & 0 & 6\end{array}\right)$ Zeile I und III tauschen

$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-7 & 6 & 0 & 6\\5 & 0 & -4 & -12\\0 & -2 & 3 & 12\end{array}\right) \quad |\,5/7\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II}$

$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-7 & 6 & 0 & 6\\0 & 30/7 & -4 & -54/7\\0 & -2 & 3 & 12\end{array}\right) \quad |\,7/15\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III}$

$\begin{array}{c}\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-7 & 6 & 0 & 6\\0 & 30/7 & -4 & -54/7\\0 & 0 & 17/15 & 42/5\end{array}\right)$

Ist die Hauptdiagonale wie in diesem Beispiel gleich 0, so reicht dies nicht aus, um die Lösung direkt abzulesen. Wir müssen trotzdem umformen.

d) Es gilt folgende Summe: $\sum_1^{n-1} n$

Damit liegen in einer Zeile genau n-1 Nullen vor und alle weiteren Zeilen haben je eine Null weniger. In unseren Beispielen hatten wir häufig n = 3. Somit $\sum_1^{n-1} n = 1+2=3$ Nullen

Bei einem 4 x 4 LGS ergeben sich entsprechend 1 + 2 + 3 = 6 Nullen.

Arbeitsblatt 03: Vektoren

Aufgabe 1

A(3|1|0) , B(1|3|0) , C(-1|1|2) , D(1|-1|2) und E(2|0|6)

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$\vec{p}+\vec{v}=\vec{p'}$ und danach $\overrightarrow{P'Q}$; Insgesamt: $\vec{p}+\vec{v}+\overrightarrow{P'Q}=\vec{q}$

Bestimmung der zweiten Verschiebung $\overrightarrow{P'Q}$:

zunächst $\vec{p'}=\vec{p}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{p'}+\overrightarrow{P'Q}=\vec{q} \qquad \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}+\overrightarrow{P'Q}=\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{P'Q}=\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}$

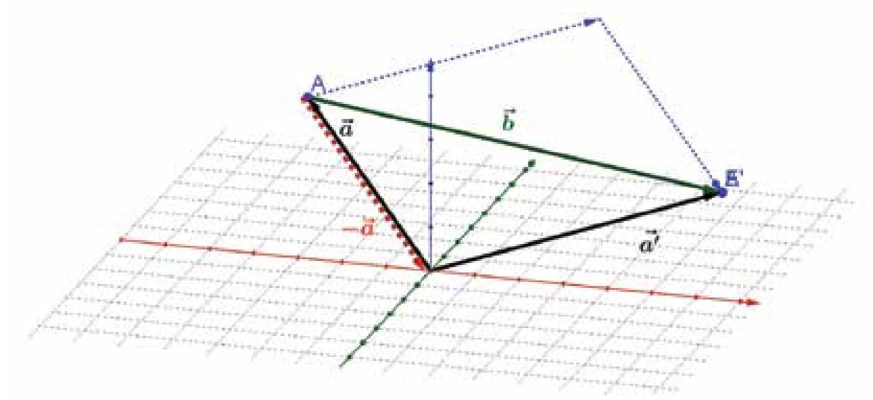
Aufgabe 3

Subtraktion/Negatives Vorzeichen entspricht Umkehrung des Vektors; Richtung dann von Pfeilspitze zu Fuß (siehe roter Vektor). Man kann auch schreiben:

$$\vec{a'} + (-\vec{a}) = \vec{b}$$

Reihenfolge der Verschiebung ist egal. Man könnte also auch schreiben (siehe blau gestrichelt):

$$(-\vec{a}) + \vec{a'} = \vec{b}$$



Umkehrung der Abbildung (Verschiebung von Bildpunkt A‘ auf Punkt A):

$$-\vec{b} = \vec{a} - \vec{a'}$$

Fazit: Vektoren können addiert werden, man kann ihre Richtung ändern, sie können in Gleichungen „umgestellt" werden (vgl. Rechengesetze, Kapitel A04)

Arbeitsblatt 04: Vektorberechnung und Vektorlänge

Aufgabe 1

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = k \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ausgangspunkt (Fußpunkt von Vektor $\vec{a}$) wird auf sich selbst abgebildet, wenn alle Vektoren addiert werden:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jede Komponente/Zeile der Vektoren kann als eigene Gleichung verstanden werden, die erfüllt werden muss.

Untere Zeile:

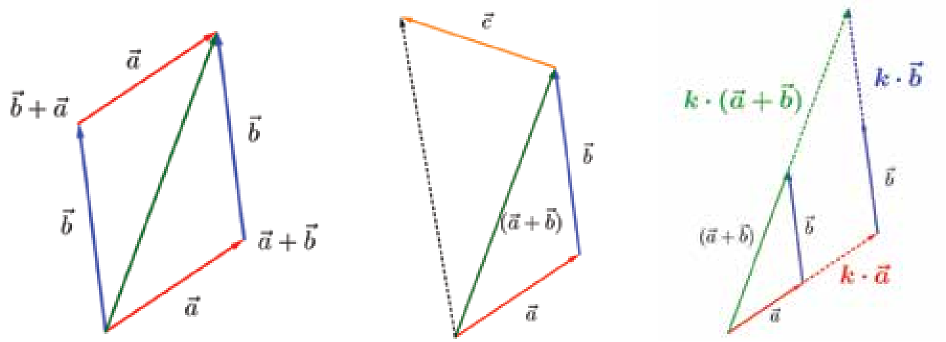
$$3 - 1k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 3$$

Obere Zeile (Ergebnis aus unterer Zeile einsetzen):

$$1 + k \cdot c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + 3 \cdot c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2



Aufgabe 3

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2k & + & 1l & - & 0,5m & = & 0 & \\
 & - & 2l & - & 3m & = & 0 & \\
1k & + & 4l & + & 5m & = & 0 & \mid \mathrm{III} - 0,5 \cdot \mathrm{I} \\
2k & + & 1l & - & 0,5m & = & 0 & \\
 & - & 2l & - & 3m & = & 0 & \\
 & + & 3,5l & + & 5,25m & = & 0 & \mid \mathrm{III} + 1,75 \cdot \mathrm{II} \\
2k & + & 1l & - & 0,5m & = & 0 & \\
 & - & 2l & - & 3m & = & 0 & \\
 & & 0l & + & 0m & = & 0 &
\end{array}$$

Unterste Zeile fällt weg; eine Variable kann frei gewählt werden, zum Beispiel m=2

Daraus folgt zweite Zeile: $-2l-3\cdot 2=0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{l=-3}$

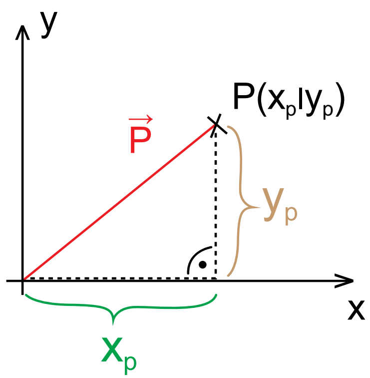
Erste Zeile: $2k+1\cdot(-3)-0{,}5\cdot 2=0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k=2}$

Zusatzaufgabe 4

Man blickt zunächst auf das vereinfachte Problem gleicher Art in einem zweidimensionalen Koordinatensystem:

Der Abstand eines Punktes zum Ursprung mit Vektor

Die „diagonale Verbindung" (also der Vektor) besteht aus einer x-gerichteten und einer y-gerichteten Komponente. Es ergibt sich zusammen ein rechtwinkliges Dreieck. Die Koordinaten des Punktes geben die Längen der Seiten an und man kann über den Satz des Pythagoras auf den Abstand schließen.



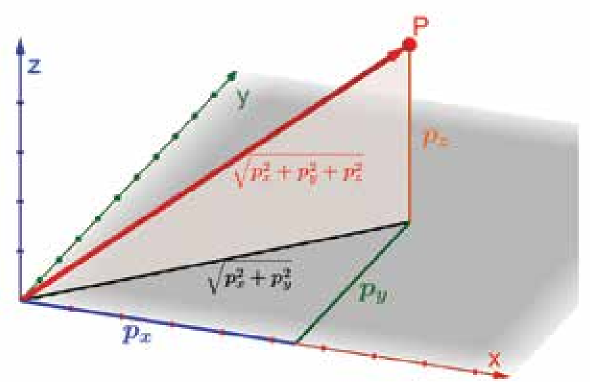
$$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Dies ist die Berechnung des Betrags eines zweidimensionalen Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$. Im dreidimensionalen Raum lässt sich das natürlich erweitern:

$$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Dabei wird der Satz des Pythagoras prinzipiell zwei Mal aneinander gereiht.

$$|\vec{p}|^2 = \left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right)^2 + p_z^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$



Arbeitsblatt 05: Linearkombination und Einheitsvektor

Aufgabe 1

$$\begin{array}{rcrcrcr l}
0u & + & 1v & + & 1w & = & 5 & \\
1u & + & 0v & + & 1w & = & -2 & \\
1u & + & 1v & + & 0w & = & -1 & \quad |\ \mathrm{III}-\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr l}
0u & + & 1v & + & 1w & = & 5 & \\
1u & + & 0v & + & 1w & = & -2 & \\
 & + & 1v & - & 1w & = & 1 & \quad |\ \mathrm{III}+\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
0u & + & 1v & + & 1w & = & 5 \\
1u & + & 0v & + & 1w & = & -2 \\
 & + & 2v & & & = & 6
\end{array}$$

$$\mathbf{v=3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w=2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u=-4}$$

Aufgabe 2

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2{,}5\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2{,}5\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8{,}5\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{d}$ soll normiert werden, zunächst Betrag bestimmen:

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-4)^2+4^2+2^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{d}_0 = \frac{1}{|\vec{d}|}\cdot\vec{d} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}1\\ s_1\\ 0\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\ 2\\ -3\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-4\\ -1\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_3\\ -9{,}5\\ 12\end{pmatrix}$$

Vektorgleichung in einzelne Gleichungen auflösen:

$$1{,}5 \cdot 1 + s_2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot (-4) = s_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_3 = -0{,}5}$$
$$1{,}5 \cdot s_1 + s_2 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot (-1) = -9{,}5$$
$$1{,}5 \cdot 0 + s_2 \cdot (-3) + 0{,}5 \cdot 6 = 12 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_2 = -3}$$

Einsetzen in zweite Gleichung:

$$1{,}5 \cdot s_1 + (-3) \cdot 2 + 0{,}5 \cdot (-1) = -9{,}5 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_1 = -2}$$

Ergebnis:

$$1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix}0\\ 2\\ -3\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-4\\ -1\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\ -9{,}5\\ 12\end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 06: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Aufgabe 1

a) $$r\begin{pmatrix}2\\ 0\\ a\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-3s + 3t = 0 \quad \rightarrow \quad t = s$$
$$a + 4t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-a}{4}$$
$$2r + 2s + 2t = 0 \quad \rightarrow \quad t = s = -0{,}5r = -0{,}5 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -0{,}5\\ -0{,}5\end{pmatrix}$$

Linear abhängig für a = 2

b) $$r\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\ -2\\ a\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-2s + 4t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0{,}5s$$
$$as + 2t = 0 \quad \rightarrow \quad as = -1s \quad \rightarrow \quad a = -1$$

Für a = -1 wären die beiden unteren Gleichungen linear abhängig mit dem Faktor 2:

$$-2s + 4t = 0$$
$$-1s + 2t = 0$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig für a ≠ -1 .

c) $$r\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\ a\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$s + t = 0 \quad \rightarrow \quad s = -t$$
$$r + t = 0 \quad \rightarrow \quad t = -r = -1$$
$$r + s + ta = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

Linear abhängig für a = 2

Aufgabe 2

Damit gesichert keine Kollision stattfindet, müssen die Kurse $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel verlaufen und somit linear abhängig sein.

$$r\begin{pmatrix}200\\ -30\\ -100\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}170\\ -25{,}5\\ -93{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Der Einfachheit halber, kann s gleich 1 gesetzt werden: s = 1

$$r\begin{pmatrix}200\\ -30\\ -100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-170\\ 25{,}5\\ 93{,}5\end{pmatrix}$$

Für jede Zeile muss das gleiche r gelten, nur dann sind die Vektoren linear abhängig.

I $\quad 200r = -170 \rightarrow r = -0{,}85$

II $\quad -30r = 25{,}5 \rightarrow r = -0{,}85$

III $\quad -100r = 93{,}5 \rightarrow r = -0{,}935$

Zeile III muss angepasst werden:

III $\quad xr = 93{,}5 \text{ mit } r = -0{,}85$

$$-0{,}85x = 93{,}5$$

$$x = -110$$

Kurs $\vec{a}$ muss korrigiert werden, sodass der neue Kurs $\begin{pmatrix}200\\ -30\\ -110\end{pmatrix}$ entspricht.

Aufgabe 3

a) Vektoren bilden als Linearkombination unmittelbar eine Matrix in Dreiecksform und sind somit linear unabhängig. Zeigen Vektoren in unterschiedliche Richtungen entsteht ein Raum.

b) $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ sind linear abhängig (Faktor 2) ; $\vec{v_2}$ wirkt auch als Vielfaches von $\vec{v_1}$ ist aber linear unabhängig, somit zeigen $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ in dieselbe Richtung und mit $\vec{v_2}$ bilden sie eine Ebene.

c) zunächst wirken alle Vektoren linear abhängig (gleiche Zahlenwerte), aufgrund der Vorzeichen ist dies aber nicht der Fall. Die Vektoren $\vec{w_2}$ und $\vec{w_3}$ sind jedoch linear abhängig (Faktor $-\frac{1}{2}$). Vektoren bilde also eine Ebene.

d) Vektoren wirken so, als würden alle in eine Richtung zeigen (das wäre eine Gerade); die Vorzeichen führen jedoch dazu, dass sich tatsächlich keine lineare Abhängigkeit zwischen ihnen ergeben kann! Die Vektoren bilden einen Raum.

Arbeitsblatt 07: Vektorräume

Aufgabe 1

$V_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 = 2\,,\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$ wähle z.B. $x_1 = 0{,}5 \ \rightarrow\ x_2 = 1{,}5$

(Bedingung $x_1 + x_2 = 2$ somit erfüllt

Vektor: $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

z.B. Multiplikation mit reeller Zahl k = 3 überprüfen: $3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

Ergebnisvektor erfüllt nicht mehr Bedingung: $1{,}5 + 4{,}5 \neq 2$

→ **Die Menge V_1 ist somit kein Vektorraum.**

$V_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}\right\}$ wähle z.B. wieder $x_1 = 0{,}5 \ \rightarrow\ x_2 = 1{,}5$

(keine Bedingung)

Vektor: $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

weiterer möglicher Vektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Überprüfe Addition: $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Ergebnis ist Teil der Menge V_2

Multiplikation: $-2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Ergebnis ist Teil der Menge V_2

Rechengesetze lassen sich auch anwenden, neutrales Element gibt es auch, Gegenelement ebenfalls

→ **Die Menge V_2 ist ein Vektorraum.**

Aufgabe 2

Lösungsweg: Ausprobieren und Gemeinsamkeiten erkennen; es gibt natürlich unendlich viele Möglichkeiten, aber die einfachen (z.B. Vielfache) kann man sehen.

Dabei auf Symmetrie der Vorzeichen achten: hier fällt $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus dem Muster, weil erste und zweite Komponente ein unterschiedliches Vorzeichen haben, sonst immer gleich

Genauere Betrachtung der übrigen Vektoren ergibt folgenden Zusammenhang:

$$V = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 3a \\ -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 08: Basis und Dimension

Aufgabe 1

$$w \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-2w & + & 5v & + & 2u & = & 0 \quad | \,\mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
-1w & + & 3v & + & 0u & = & 0 \\
3w & + & v & + & 2u & = & 0 \quad | \,\mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{II} \\
\\
 & - & 1v & + & 2u & = & 0 \\
-1w & + & 3v & + & 0u & = & 0 \\
 & + & 10v & + & 2u & = & 0 \quad | \,\mathrm{III} - \mathrm{I} \\
\\
 & - & 1v & + & 2u & = & 0 \\
-1w & + & 3v & + & 0u & = & 0 \\
 & + & 11v & & & = & 0
\end{array}$$

einzige Lösung: **v = u = w = 0** **Vektoren bilden Basis**

Aufgabe 2

Basis-Vektoren müssen linear unabhängig sein; man kann natürlich alle Kombinationen überprüfen, aber ein Blick vorher hilft

→ Man kann sehen, dass der erste Vektor die Summe des zweiten und letzten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\end{pmatrix}$$

diese drei Vektoren bilden somit keine Basis

→ der zweite und dritte Vektor sind linear abhängig: $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\cdot 0{,}75=\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\-0{,}75\end{pmatrix}$

somit können sie nicht zusammen als Basisvektoren verwendet werden

Es bleibt zu überprüfen, ob folgende Vektoren eine Basis bilden:

$$k\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\-1\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\-0{,}75\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da jedoch $\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\-0{,}75\end{pmatrix}$ linear abhängig von $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$, ergibt sich auch hier keine Lösung denn es gilt wie oben:

$$-\frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\-0{,}75\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\end{pmatrix}$$

Also nein, es kann keine Basis für einen dreidimensionalen Vektorraum gebildet werden, weil alle Vektor-Kombinationen linear abhängig sind.

Aufgabe 3

$V_1=\left(\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}\middle|\, u,v\in\mathbb{R}\right)$ Dimension beträgt 2; obwohl drei Komponenten vorliegen, reichen zwei Vektoren als Basis, da dritte Komponente immer 0 ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$V_2=\left(\begin{pmatrix}u\\v\\u+v\end{pmatrix}\middle|\, u,v\in\mathbb{R}\right)$ Dimension beträgt 2; Basis-Vektoren wären zum Beispiel $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aus denen sich sämtliche Vektoren des Vektorraums bilden lassen

$V_3=\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1\\x_4\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right)$ Dimension beträgt 3; Basis-Vektoren wären $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ aus denen sich sämtliche Vektoren des Vektorraums bilden lassen

Arbeitsblatt 09: Vektordarstellung von Geraden

Aufgabe 1

$$\overline{OP}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\\2{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-9\\-3\\-3{,}5\end{pmatrix}$$

Soll der Punkt P auf der Geraden liegen, muss sich für alle 3 Zeilen das gleiche k ergeben.

-0,5 = 4 - 9k → k = 0,5

2,5 = 4 - 3k → k = 0,5

2,25 = 4 - 3,5k → k = 0,5

Punkt P liegt auf der Geraden.

$$\overline{OQ}=\begin{pmatrix}22\\10\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-9\\-3\\-3{,}5\end{pmatrix}$$

22 = 4 - 9k → k = -2

10 = 4 - 3k → k = -2

12 = 4 - 3,5k → k = -16/7

Punkt Q liegt nicht auf der Geraden.

$$\overline{OR}=\begin{pmatrix}-14\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-9\\-3\\-3{,}5\end{pmatrix}$$

-14 = 4 - 9k → k = 2

-2 = 4 - 3k → k = 2

-3 = 4 - 3,5k → k = 2

Punkt R liegt auf der Geraden.

Aufgabe 2

Aus den beiden Bedingungen lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}-6\\41\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}18\\-79\\-23\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

Bestimmung a_1 und b_1 aus den jeweils ersten Zeilen beider Gleichungssysteme.

$$-6 = a_1 + 2b_1 \rightarrow \quad a_1 = -6 - 2b_1$$

$$18 = a_1 - 4b_1 \rightarrow \quad 18 = -6 - 2b_1 - 4b_1 \rightarrow \quad \mathbf{b_1 = -4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a_1 = 2}$$

Bestimmung a_2 und b_2 analog:

$$41 = a_2 + 2b_2 \rightarrow \quad a_2 = 41 - 2b_2$$

$$-79 = a_2 - 4b_2 \rightarrow \quad -79 = 41 - 2b_2 - 4b_2 \rightarrow \quad \mathbf{b_2 = 20} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a_2 = 1}$$

Bestimmung a_3 und b_3 analog:

$$7 = a_3 + 2b_3 \rightarrow \quad a_3 = 7 - 2b_3$$

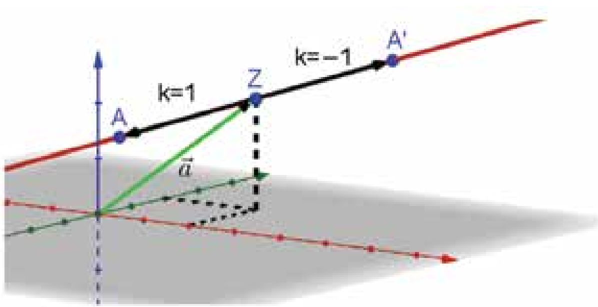
$$-23 = a_3 - 4b_3 \rightarrow \quad -23 = 7 - 2b_3 - 4b_3 \rightarrow \quad \mathbf{b_3 = 5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a_3 = -3}$$

Daraus ergibt sich die Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + k\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}-4\\20\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Eine Spiegelung des Punkts A am Punkt Z kann mit Hilfe einer Geradengleichung bestimmt werden. Dabei dient die Strecke $\overrightarrow{OZ}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{ZA}$ als Richtungsvektor. Die Spiegelung lässt sich durchführen, indem der Parameter k mit einem negativen Vorzeichen versehen wird, da sich dadurch die Richtung des Richtungsvektors umkehrt.



Soll ein Punkt A an einem Punkt Z im Raum gespiegelt werden, so kann dies mit Hilfe einer Parameterdarstellung der Geraden durchgeführt werden.

Für den Bildpunkt A‘ gilt: $A' \rightarrow \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OZ} - k\cdot\overrightarrow{AZ}$

Arbeitsblatt 10: Gegenseitige Lage von Geraden

Aufgabe 1

Lage zwischen g und h:

$$\begin{pmatrix}3\\2{,}75\\-7\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}-10{,}4\\17{,}55\\-41{,}6\end{pmatrix}$$

$$k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}-10{,}4\\17{,}55\\-41{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1{,}75\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & + & 10{,}4l & = & -2 & \quad \mathrm{I} \\ -6{,}75k & - & 17{,}55l & = & -1{,}75 & \quad \mathrm{II} \\ 16k & + & 41{,}6l & = & 9 & \quad \mathrm{III} \qquad \left| \, \mathrm{III} + \frac{16}{6{,}75}\mathrm{II} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & + & 10{,}4l & = & -2 & \quad \mathrm{I} \\ -6{,}75k & - & 17{,}55l & = & -1{,}75 & \quad \mathrm{II} \\ & & 0l & = & \frac{131}{27} & \quad \mathrm{III} \end{array}$$

$\longrightarrow$ l = keine Lösung $\rightarrow$ k = keine Lösung

$$\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix} = l\cdot\begin{pmatrix}-10{,}4\\17{,}55\\-41{,}6\end{pmatrix} \qquad l = -2{,}6 \quad \rightarrow \quad \text{parallel}$$

Lage zwischen g und i:

$$\begin{pmatrix}3\\2{,}75\\-7\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-4\\-2\end{pmatrix} + m\cdot\begin{pmatrix}14\\0\\11\end{pmatrix}$$

$$k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix}14\\0\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-6{,}75\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & - & 14m & = & -10 & \quad \mathrm{I} \\ -6{,}75k & - & 0m & = & -6{,}75 & \quad \mathrm{II} \\ 16k & - & 11m & = & 5 & \quad \mathrm{III} \qquad \left| \, \mathrm{III} + \frac{16}{6{,}75}\mathrm{II} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & - & 14m & = & -10 & \quad \mathrm{I} \\ -6{,}75k & - & 0m & = & -6{,}75 & \quad \mathrm{II} \\ & & -11m & = & -11 & \quad \mathrm{III} \end{array}$$

$\rightarrow \quad m = 1 \rightarrow \quad k = 1$ Geraden schneiden sich.

Lage zwischen g und j:

$$\begin{pmatrix}3\\2{,}75\\-7\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix}$$

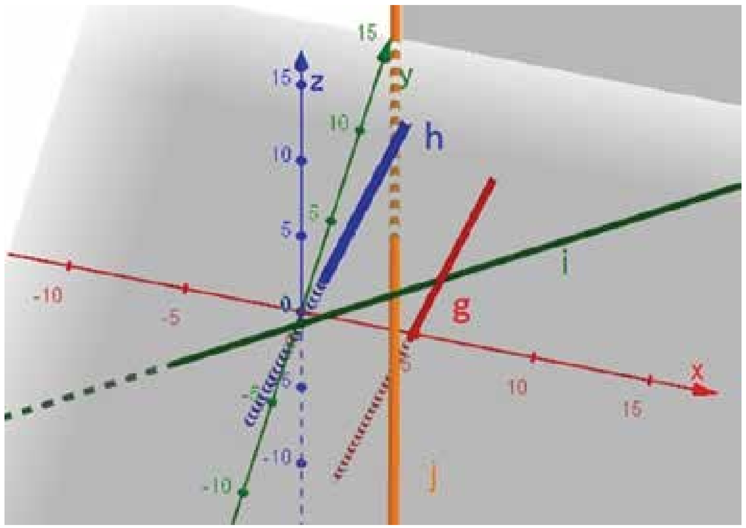
$$k\cdot\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix}-n\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1{,}25\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & - & 14m & = & 0 & \text{I} \\ -6{,}75k & - & 0m & = & 1{,}25 & \text{II} \\ 16k & - & 11m & = & 7 & \text{III} \quad \mid \text{III}+\frac{16}{6{,}75}\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 4k & - & 14m & = & 0 & \text{I} \\ -6{,}75k & - & 0m & = & 1{,}25 & \text{II} \\ & & -11m & = & \frac{269}{27} & \text{III} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad m=\frac{269}{297} \rightarrow \quad k = \text{keine Lösung}$$

$$\begin{pmatrix}4\\-6{,}75\\16\end{pmatrix}=n\cdot\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} \quad n = \text{keine Lösung} \quad \rightarrow$$ windschief



Aufgabe 2

Die Flugbahn des Zeppelins soll mit der Blickrichtung des Teleskops übereinstimmen. Dazu werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$z: \vec{x}=\begin{pmatrix}50\\100\\200\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}90\\60\\z\end{pmatrix}$$

$$k\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-l\cdot\begin{pmatrix}90\\60\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}50\\100\\200\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 5k & - & 90l & = & -50 & \text{I} \\ 2k & - & 60l & = & -100 & \text{II} \\ k & - & zl & = & -200 & \text{III} \quad \mid \text{III}-0{,}5\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 5k & - & 90l & = & -50 & \text{I} \\ 2k & - & 60l & = & -100 & \text{II} \\ & & (30-z)l & = & -150 & \text{III} \end{array}$$

$$\text{III} \rightarrow l=-\frac{150}{30-z}$$

$$\text{II} \rightarrow 2k-60\cdot\left(-\frac{150}{30-z}\right)=-100 \quad \rightarrow k=-50-\frac{4500}{30-z}$$

$$\text{I} \rightarrow 5\cdot\left(-50-\frac{4500}{30-z}\right)-90\cdot\left(-\frac{150}{30-z}\right)=-50$$

$$\rightarrow -250-\frac{22500}{30-z}+\frac{13500}{30-z}=-50$$

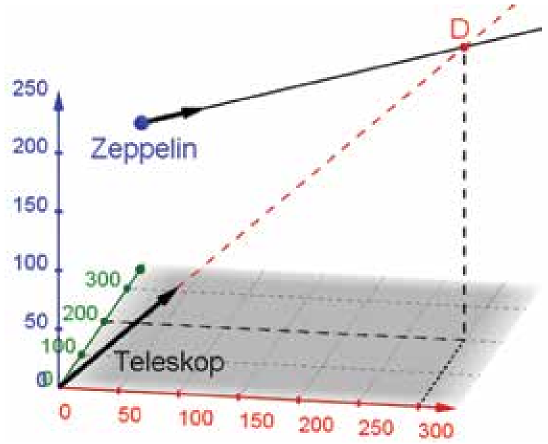
$$\rightarrow \frac{-9000}{30-z}=200$$

$$\rightarrow -9000=200\cdot(30-z)$$

$$\rightarrow -45=(30-z)$$

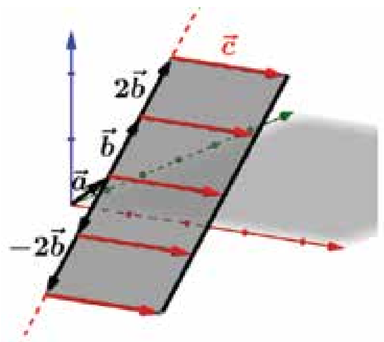
$$\rightarrow z=75$$

Das Teleskop muss mit einer Höhe von $z = 75$ eingestellt werden.



Aufgabe 3

Durch „Aneinanderreihung" der Geraden g und des Vektors $\vec{c}$ entsteht ein Parallelogramm. Dabei entspricht eine Seitenlänge dem Vektor $\vec{c}$ und die andere beträgt in diesem Beispiel $4\vec{b}$, also dem Wertebereich von k multipliziert mit dem Richtungsvektor $\vec{b}$.



- Der Sachverhalt wird durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{b} + \vec{c}$ beschrieben.

- Liegt der Vektor $\vec{c}$ senkrecht zur Geraden g, so ergibt sich ein Rechteck. Liegt $\vec{c}$ parallel bleibt es bei einer Geraden.

Klasse 12,1 - Oberthema B

Geraden und Ebenen

Arbeitsblatt 01: Skalarprodukt von Vektoren

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=2\cdot3+(-1)\cdot4=2$

b) $\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\7\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}=0+35+2+12-3+6=52$

c) $s\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=s\,u_1v_1+s\,u_2v_2+s\,u_3v_3$

Aufgabe 2

a)

i. $\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\a\\-3\end{pmatrix}=6$

$-15+2a+12=6 \quad\rightarrow\quad 2a=9 \quad\rightarrow\quad \mathbf{a=4,5}$

ii. $2\cdot\begin{pmatrix}-6\\3,5\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\a\end{pmatrix}=0$

$2\cdot(-18+(-7)+a^2)=0 \quad\rightarrow\quad a^2=25 \quad\rightarrow\quad \mathbf{a=5}$

ii. $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-a\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}=4a$

$-2a+3+5+5a-8=4a \quad\rightarrow\quad 3a=4a \quad\rightarrow\quad \mathbf{a=0}$

b)

i. $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$

Berechnung ist möglich; Skalarprodukt ist auch für Vektorräume R^4 oder höher definiert.

ii. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$

Berechnung nicht möglich; beim Skalarprodukt müssen die Vektoren gleich viele Komponenten besitzen

iii. $\vec{p}\cdot\vec{q}\cdot\vec{r}$

Berechnung teilweise möglich; Berechnung nicht als „doppeltes Skalarprodukt“ direkt miteinander möglich, aber in folgender Form:

$(\vec{p}\cdot\vec{q})\cdot\vec{r}=(p_1q_1+p_2q_2+\ldots)\cdot\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\\ldots\end{pmatrix}$

Also Skalarprodukt vorne berechnen, dann erhält man Skalar und multipliziert Vektor mit einem normalen Faktor.

Aufgabe 3

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

z.B. mit Vektoren des $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=(a_1+b_1)\cdot c_1+(a_2+b_2)\cdot c_2+(a_3+b_3)\cdot c_3$

linke Seite der Gleichung $\quad=\mathbf{a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+a_3c_3+b_3c_3}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

rechte Seite der Gleichung $\quad=\mathbf{a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+a_3c_3+b_3c_3}$

Umgeformt stimmen beide Seiten der Gleichung überein!

Arbeitsblatt 02: Winkel zwischen Vektoren

Aufgabe 1

a) Formel: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$ $\quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$$\cos(\varphi) = \frac{3\cdot(-2)+1\cdot 5+0\cdot 4}{\sqrt{9+1+0}\cdot\sqrt{4+25+16}} = \frac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}} = \frac{-1}{21{,}21} \approx -0{,}0471$$

$\rightarrow \quad \varphi = \arccos(-0{,}0471) = \mathbf{92{,}7°}$

(negatives Skalarprodukt $\rightarrow \varphi > 90°$)

b) $\cos(\varphi) = \cos(90°) = 0 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ Zähler muss Null werden

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \leftarrow$ Gleichung gilt allgemein für orthogonale Vektoren

$0 = -12 - t + 10 = -2 - t \quad \rightarrow \quad t = -2$

Aufgabe 2

Normalenvektor $\vec{n}$ muss senkrecht auf $\vec{a}$ **und** auf $\vec{b}$ stehen. Daher zwei Gleichungen erstellen, die erfüllt werden müssen (Skalarprodukt mit Normalenvektor muss Null sein (s. Aufgabe 1)):

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 3n_1 + n_2 = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -2n_1 + 5n_2 + 4n_3 = 0$$

Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 3n_1 & + & n_2 & & & = & 0 & \mathrm{I} \\ -2n_1 & + & 5n_2 & + & 4n_3 & = & 0 & \mathrm{II} \end{array}$$

aus Gleichung I : $n_2 = -3n_1$

mit Gleichung I für Gleichung II: $-2n_1 + 5\cdot(-3n_1) + 4n_3 = 0 \qquad n_3 = \frac{17}{4}n_1$

Somit n_2 und n_3 als Vielfaches von n_1 ausgedrückt. n_1 dann frei wählbar und alle Vektoren die folgende Gleichung erfüllen stehen somit senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\-3n_1\\17/4\ n_1\end{pmatrix} \qquad \text{oder man schreibt auch z.B.:} \qquad \vec{n} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\17/4\end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei Gleichungssystemen wie oben (zwei Gleichungen aber drei Unbekannte) wird man immer eine Lösung (bzw. unendlich Lösungen) erhalten, die durch Vielfache einer Variable ausgedrückt werden. Man spricht hier von Freiheitsgraden. Hier gibt es 3 (Unbekannte) – 2 (Gleichungen) = 1 (Freiheitsgrade).

Aufgabe 3

a) Haben zwei Vektoren einen Betrag von 1 (man nennt es auch „normiert“), so gilt:

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1\cdot 1} = \vec{a}\cdot\vec{b} = \cos(\varphi)$$

Der Winkel lässt sich also unmittelbar aus dem Skalarprodukt der Vektoren bestimmen.

b) Die Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ist die verkürzte Form von $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$ mit $\cos(\varphi) = 1$. Dies gilt für $\varphi = 0$. Die Vektoren zeigen somit in die gleiche Richtung.

Arbeitsblatt 03: Ebene in Parameterform und Koordinatenform

Aufgabe 1

Damit Punkt P in Ebene, muss die Ebenengleichung für $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ erfüllt sein.

$$\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \Big|\, -\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3-4\\3-(-2)\\-1-0\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen mit Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrl}
k & - & 2l & = & -7 & \mathrm{I} \\
2k & + & l & = & 5 & \mathrm{II} \quad | \, \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
4k & + & 2l & = & -1 & \mathrm{III} \quad | \, \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl}
k & - & 2l & = & -7 & \mathrm{I} \\
 & + & 5l & = & 19 & \mathrm{II} \\
 & + & 10l & = & 27 & \mathrm{III}
\end{array}$$

Zeile II und Zeile III liefern unterschiedliche Lösungen für den Koeffizienten l , somit lässt sich Punkt P nicht durch die Ebenengleichung beschreiben und liegt daher auch nicht in der Ebene.

Umformen in Koordinatenform:

$x_1 = 4 + 1k - 2l$

$x_2 = -2 + 2k + 1l$

$x_3 = 0 + 4k + 2l$

$x_1 + x_3 = 4 + 5k$

$x_1 + 2x_2 = 0 + 5k$

$(x_1 + x_3) - (x_1 + 2x_2) = 4 \qquad x_3 - 2x_2 = 4$

Aufgabe 2

Gemäß Formel für Ebenengleichung in Parameterform $\vec{x} = \vec{u} + k \cdot \vec{v} + l \cdot \vec{w}$

soll Punkt C mit $\overrightarrow{OC}$ der Stützvektor $\vec{u}$ sein: $\vec{u} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind daher: $\vec{v} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

und $\vec{w} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzen der Gleichungen

$$g = E$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lösen mit Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
5s & - & 4t & + & 3r & = & 1 & \mathrm{I} \quad | \, \mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{III} \\
3s & + & 2t & + & 3r & = & 8 & \mathrm{II} \quad | \, \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{III} \\
s & - & 3t & - & 1{,}5r & = & 1 & \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & 11t & + & 10{,}5r & = & -4 & \mathrm{I} \quad | \, \mathrm{I} - \mathrm{II} \\
 & & 11t & + & 7{,}5r & = & 5 & \mathrm{II} \\
s & - & 3t & - & 1{,}5r & = & 1 & \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & & + & 3r & = & -9 & \mathrm{I} \\
 & & 11t & + & 7{,}5r & = & 5 & \mathrm{II} \\
s & - & 3t & - & 1{,}5r & = & 1 & \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{r = -3\,,} \qquad \mathbf{t = 2{,}5\,,} \qquad \mathbf{s = 4}$$

Für Koordinaten des Schnittpunkts einfach r = -3 in Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt liegt bei S(8|15 |-0,5).

Ergebnis überprüfen durch Einsetzen von t und s in Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ergebnis stimmt!

Arbeitsblatt 04: Ebenen in Normalenform

Aufgabe 1

Koeffizienten der Koordinatengleichung bilden Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kann gezeigt werden durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \rightarrow \quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \vec{p} \cdot \vec{n} = b$$

Daraus lässt sich $\vec{p}$ bestimmen wegen

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = b \qquad \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 18$$

$\vec{p}$ lässt sich beliebig festlegen. Man kann zwei Koordinaten frei wählen und erfüllt die Gleichung mit der dritten, z.B. $p_1 = p_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 18 \qquad 0 \cdot (-4) + 2p_2 + 0 \cdot 1 = 18 \rightarrow p_2 = 9$$

$$\mathbf{\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0}$$

Aufgabe 2

Überprüfe, ob der Punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in der Ebene mit der Normalenform $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ liegt. Forme die Ebenengleichung außerdem in Koordinatenform um.

Zunächst Punkt A überprüfen. Hierfür Koordinaten von A als $\vec{x}$ in Gleichung einsetzen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 5 - 3 - 2 = 0$$

Ebenengleichung wird erfüllt, Punkt A liegt in der Ebene.

Koordinatengleichung aufstellen:
Normalenvektor entspricht wie immer den Koeffizienten, daher ist bereits bekannt, dass

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = b$$

Es gilt außerdem wieder:

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = b \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 1 - 4 = -3$$

$$\mathbf{5x_1 - x_2 + 2x_3 = -3}$$

Aufgabe 3

Punkt P wieder für $\vec{x}$ einsetzen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-1 + 16 - 9t = 0 \quad \rightarrow \quad -9t = -15 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = \tfrac{5}{3}}$$

Aufgabe 4

Wie in der Beispielaufgabe, ist für jeden Punkt eine eigene Gleichung aufzustellen, um Koeffizienten $n_{1,2,3}$ zu bestimmen; dabei bildet der Ursprung ebenfalls einen Punkt!

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4n_1 & + & 3n_2 & + & 1n_3 & = & b \quad |I - 2 \cdot II \\ 2n_1 & + & 1n_2 & - & 1n_3 & = & b \\ 0n_1 & + & 0n_2 & + & 0n_3 & = & b \end{array}$$

Es folgt: **b = 0** und mit Zeile I - 2 · Zeile

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 1n_2 & + & 3n_3 & = & 0 \\ 2n_1 & + & 1n_2 & - & 1n_3 & = & 0 \end{array}$$

System ist „unterbestimmt“, daher kann eine Komponente frei gewählt werden:

z.B.: $\mathbf{n_2 = 3}$ **dann folgt** $\mathbf{n_3 = -1}$ **und** $\mathbf{n_1 = -2}$

$$\mathbf{-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0}$$

Arbeitsblatt 05: Spurpunkte und Spurgeraden

Aufgabe 1

a) Spurpunkte betrachten, zunächst auf der x_1 - Achse:

$S_1(3|0|0)$ → $3a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = b$ z.B. wählen: $\mathbf{b = 3}$, dann $\mathbf{a_1 = 1}$

x_2 - Achse:

$S_2(0|5|0)$ → $1 \cdot 0 + 5a_2 + a_3 \cdot 0 = 3$ $\mathbf{a_2 = \frac{3}{5}}$

x_3 - Achse:

$S_3(0|0|3)$ → $1 \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 + 3a_3 = 3$ $\mathbf{a_3 = 1}$

$$\mathbf{x_1 + \frac{3}{5}x_2 + 1x_3 = 3}$$

b) $S_1(1|0|0)$ → $1a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = b$ z.B. wählen: $\mathbf{b = 1}$, dann $\mathbf{a_1 = 1}$

x_2 - Achse:

$S_2(0|4|0)$ → $1 \cdot 0 + 4a_2 + a_3 \cdot 0 = 1$ $\mathbf{a_2 = \frac{1}{4}}$

x_3 - Achse:

$S_3(0|0|-3)$ → $1 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 - 3a_3 = 1$ $\mathbf{a_3 = -\frac{1}{3}}$

$$\mathbf{x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 1}$$

Aufgabe 2

Nur zwei Spurpunkte! Kein Schnittpunkt mit x_1 - Achse, daher fällt dies in der Koordinatengleichung weg:

$$\cancel{a_1x_1} + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

x_2 - Achse:

$2a_2 + a_3 \cdot 0 = b$ wieder frei wählen: $b = 2$ und somit $a_2 = 1$

x_3 - Achse:

$1 \cdot 0 - 3a_3 = 2$ → $a_3 = -\frac{2}{3}$

$$\mathbf{x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 2}$$

Aufgabe 3

a) $x_1 + 2x_3 = -3$ → kein Schnittpunkt mit x_2 - Achse, Ebene liegt somit parallel zur dieser;
Spurpunkte bei S_1 (-3|0|0) und S_3 (0|0|-1,5) ;
Spurgerade mit $x_1 = -2x_3 - 3$;

b) $x_2 = 1$ → nur Spurpunkt bei S_2 (0|1|0) ; Ebene liegt parallel zur x_1 - x_3 - Ebene

c) $x_1 - x_2 = 0$ → Ebene verläuft durch Koordinatenursprung; Spurgerade ist $x_1 = x_2$;
somit diagonal durch die x_1 - x_2 - Ebene ; x_3 - Achse liegt in der Ebene

Arbeitsblatt 06: Lage von Gerade zu Ebene

Aufgabe 1

Wie bei der Beispielaufgabe solltest du zunächst die Geradengleichung in Komponenten zerlegen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 - 3k \\ x_2 &= -1 + 4k \\ x_3 &= -1 + 2k \end{aligned}$$

Einsetzen in Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} E: 2 \cdot (2 - 3k) + (-1 + 4k) + (-1 + 2k) &= 5 \\ 4 - 6k + -1 + 4k + -1 + 2k &= 5 \\ 2 + 0k &\neq 5 \quad \rightarrow \quad \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Gerade und Ebene sind parallel!

Aufgabe 2

Stützvektor der Geraden und der Ebene sind identisch. g und E haben somit definitiv einen Schnittpunkt. Nun überprüfen, ob Gerade in der Ebene liegt (Vektoren verlaufen parallel; unendlich Lösungen) oder es nur eine Lösung gibt (Durchstoßpunkt gemäß Stützvektor). Parallelität überprüfen durch lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$$

Als Gleichungssystem schreiben und Gauß-Algorithmus anwenden:

$$\begin{array}{rcrcrcl l l}
2k & + & 2s & - & 1t & = & 0 & \mathrm{I} & \\
-6k & - & 6s & + & 3t & = & 0 & \mathrm{II} & \mid \mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{I} \\
-4k & - & 8s & + & 3{,}5t & = & 0 & \mathrm{III} & \mid \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
2k & + & 2s & - & 1t & = & 0 & \mathrm{I} \\
 & & & & 0 & = & 0 & \mathrm{II} \\
 & - & 4s & + & 1{,}5t & = & 0 & \mathrm{III}
\end{array}$$

Es bleiben zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Daher liegen unendlich viele Lösungen vor.

Die Gerade verläuft in der Ebene!

Für eine mögliche Linearkombination wählt man beispielsweise t = 8 , dann ergibt sich s = 3 und k = 1 . Der Lösungsvektor lautet

$$\vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

mit allen Vielfachen dieser Kombination.

Aufgabe 3

Gerade hat keinen Schnittpunkt mit Ebene, wenn Richtungsvektor der Geraden parallel zur Ebene liegt.
Ansatz: Der Normalenvektor der Ebene steht senkrecht zur Ebene. Wenn er auch senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden steht, sind Ebene und Gerade parallel. Koeffizienten der Ebene entsprechen Normalenvektor:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ stehen. Hierzu Skalarprodukt gleich Null setzen:

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 \cdot a + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-6) = 0$$

$$3a = 9 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Somit ist $\quad \mathbf{E: 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8}$

Zweiter Teil der Aufgabe:

Unendlich Lösungen, wenn die Gerade in der Ebene liegt. Richtungsvektor ist bereits parallel zur Ebene. Stützvektor muss zu einem Punkt der Ebene führen. Komponenten des Stützvektors müssen Ebenengleichung erfüllen. Hierzu zwei Koordinaten festlegen des Stützvektors $\vec{s}$, z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Diesen in Ebenengleichung einsetzen:

$$E: 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2x_3 = 8$$

Damit Gleichung erfüllt, muss auch $x_3 = 1$. Der Punkt (1|1|1) ist also Teil der Ebene und wird mit

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Stützvektor der Geraden verwendet

$$\mathbf{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

Arbeitsblatt 07: Lage von Ebene zu Ebene

Aufgabe 1

Ebene 1 zu Ebene 2:

$$\begin{array}{rcrcrcl l l}
2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 & \mathrm{I} & \\
4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 & \mathrm{II} & \mid \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 & \mathrm{I} \\
 & + & 9x_2 & - & x_3 & = & 5 & \mathrm{II}
\end{array}$$

$$x_3 = -5 + 9x_2$$

$$2x_1 - 3x_2 + (-5 + 9x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad 2x_1 = 6 - 6x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3 - 3x_2$$

$$\mathbf{g_{1/2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

Orthogonalität:

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$ Ebene 1 und Ebene 2 sind orthogonal

Ebene 1 zu Ebene 3:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 & \quad \mathrm{I} \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 & \quad \mathrm{III} \end{array}$$

$$x_2 = 9 - 3x_3$$

$$2x_1 - 3 \cdot (9 - 3x_3) + x_3 = 1 \;\rightarrow\; 2x_1 = 28 - 10x_3 \;\rightarrow\; x_1 = 14 - 5x_3$$

$$\mathbf{g_{1/3}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität:

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$$

Ebene 1 und Ebene 3 sind orthogonal

Ebene 2 zu Ebene 3:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 & \quad \mathrm{II} \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 & \quad \mathrm{III} \end{array}$$

$$x_2 = 9 - 3x_3$$

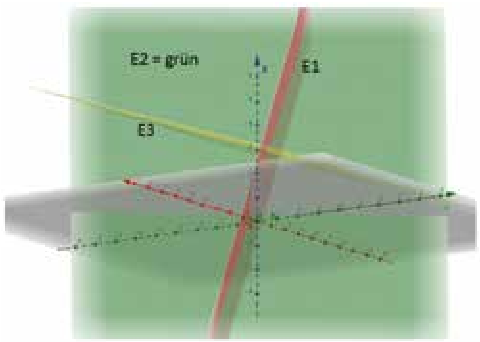
$$4x_1 + 3 \cdot (9 - 3x_3) + x_3 = 7 \;\rightarrow\; 4x_1 = -20 + 8x_3 \;\rightarrow\; x_1 = -5 + 2x_3$$

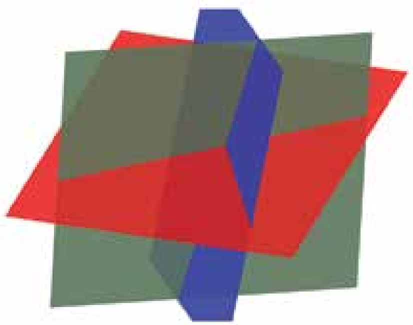
$$\mathbf{g_{2/3}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität:

$$\vec{n_2} \cdot \vec{n_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6$$

Ebene 2 und Ebene 3 sind nicht orthogonal





Aufgabe 2

$$E_1 = E_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem und Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrll} -3k & + & 2l & + & 4u & - & 7v & = & 1 & \mathrm{I} & \\ 6k & + & 2l & - & 2u & - & 5v & = & -1 & \mathrm{II} & |\; \mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I} \\ -3k & - & 2l & - & 2u & - & 3v & = & -1 & \mathrm{III} & |\; \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrll} -3k & + & 2l & + & 4u & - & 7v & = & 1 & \mathrm{I} & \\ & + & 6l & + & 6u & - & 19v & = & 1 & \mathrm{II} & \\ & - & 4l & - & 6u & + & 4v & = & -2 & \mathrm{III} & |\; 3 \cdot \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} -3k & + & 2l & + & 4u & - & 6v & = & 1 & \mathrm{I} \\ & + & 6l & + & 6u & - & 18v & = & 1 & \mathrm{II} \\ & & & - & 6u & - & 26v & = & -4 & \mathrm{III} \end{array}$$

unterste Zeile:

$$u = -\frac{13}{3}v + \frac{2}{3}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung von E_2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{13}{3}v + \frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{13}{3}v\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 52/3 \\ -26/3 \\ -26/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 73/3 \\ -14/3 \\ -14/3 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Schnittgeraden

Aufgabe 3

schneiden:

$\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{e}$ sind linear unabhängig oder/und $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{f}$ sind linear unabhängig

parallel:

$\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{e}$ sind linear abhängig und $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{f}$ sind linear abhängig

UND

$\vec{a} - \vec{d}$ ist linear unabhängig zu $\vec{b}, \vec{c}$ (damit die Ebenen nicht ineinander liegen; vgl. nächster Fall)

identisch:

$\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{e}$ sind linear abhängig und $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{f}$ sind linear abhängig

UND

$\vec{a} - \vec{d}$ ist linear abhängig zu $\vec{b}, \vec{c}$

Arbeitsblatt 08: Schnittwinkel

Aufgabe 1

a) Zunächst **Schnittpunkt überprüfen:**

$$\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$u \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}6\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 2u & + & 6v & = & 2 & \text{I} \\ -2u & - & 3v & = & -2 & \text{II} \\ 2u & - & 2v & = & 2 & \text{III} \quad |\,\text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 2u & + & 6v & = & 2 & \text{I} \\ -2u & - & 3v & = & -2 & \text{II} \\ & - & 8v & = & 0 & \text{III} \end{array}$$

→ $v = 0 \rightarrow u = 1$ Geraden schneiden sich

erster Fall, zwei Geraden: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{t} \cdot \vec{v}|}{|\vec{t}| \cdot |\vec{v}|}$ mit $\vec{t}$ und $\vec{v}$ als

Richtungsvektoren

$$\vec{t} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix} = -12 - 6 + 4 = -14 \qquad |\vec{t}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3{,}46$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 2^2} = 7$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|-14|}{3{,}46 \cdot 7} = 0{,}578 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 54{,}7°}$$

b) Überprüfen ob Ebenen sich schneiden, zwei Möglichkeiten:

1. direkt erkennen: Normalenvektoren (s.u.) sind ungleich bzw. keine Vielfachen voneinander, daher sind die Ebenen nicht parallel und müssen sich schneiden (nur parallele Ebenen schneiden sich nie)

2. systematisch Gleichungssystem der beiden Ebenengleichungen aufstellen (vgl. mit Schnittgerade bestimmen Kapitel B07):

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & \text{I} \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 8 & \text{II} \quad |\,\text{II} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & \text{I} \\ & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 10 & \text{II} \quad |\,\text{II} + \text{I} \end{array}$$

→ Gleichungssystem normal lösbar, somit existiert Schnittgerade (nicht zu bestimmen)

dritter Fall, zwei Ebenen: $E_1: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_1} = 0$ $\quad E_2: (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n_2} = 0$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

Beide Ebenen sind in Koordinatenform und nicht in Normalenform angegeben, daher Normalenvektor bestimmen (unmittelbar aus den Koeffizienten ablesbar):

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} = -1 - 2 + 8 = 5 \qquad |\vec{n_1}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = 2{,}45$$

$$|\vec{n_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = 4{,}58$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|5|}{2{,}45 \cdot 4{,}58} = 0{,}446 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 63{,}54°}$$

Aufgabe 2

Schnittpunkt überprüfen:

Kann man wie üblich durch Einsetzen der Komponenten der Geradegleichung in Ebenengleichung bestimmen und erhält $u = 0$ als eine Lösung.

Man kann aber auch direkt erkennen, dass der Stützvektor bereits die Ebenengleichung erfüllt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 = 1 - 3 + 2$$

zweiter Fall, Gerade und Ebene: $h: \vec{x} = \vec{u} + l \cdot \vec{v}$ $\quad E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$|\vec{v} \cdot \vec{n}| = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |a - 2 + 4| = |2 + a|$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{a^2 + 20}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1{,}73$$

$$\sin(30) = 0{,}5 = \frac{|2 + a|}{\sqrt{a^2 + 20} \cdot 1{,}73} \quad |\,^2$$

$$0{,}25 = \frac{(2 + a)^2}{(a^2 + 20) \cdot 1{,}73^2}$$

$$0{,}25 \cdot 1{,}73^2(a^2 + 20) = 4 + 4a + a^2$$

$$14{,}96 + 0{,}748a^2 = 4 + 4a + a^2$$

$$0 = 0{,}252a^2 + 4a - 10{,}96$$

$$0 = a^2 + 15{,}873a - 43{,}49$$

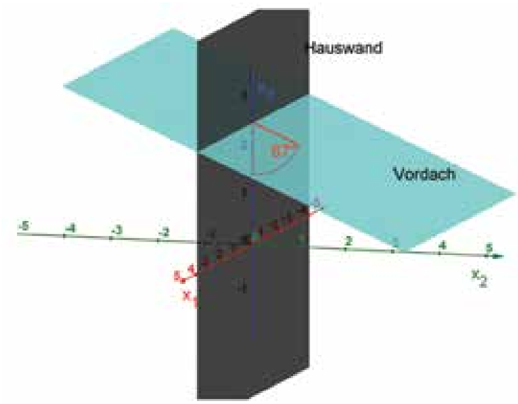
p-q-Formel:

$$a_{1,2} = -7{,}94 \pm \sqrt{7{,}94^2 + 43{,}49}$$

$$\mathbf{a_1 = 2{,}38 \ \ und \ \ a_2 = -18{,}26}$$

Aufgabe 3

Unbedingt zuerst eine Skizze anfertigen mit allen Achsen (Vorwegnahme der Lösungsansicht):



dritter Fall, zwei Ebenen: $\quad \cos(67°) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = 0{,}39$

Infos zu Hauswand (Ebene E_H):

Gleichung für $x_1 x_3$ - Ebene : → $\mathbf{E_H: x_2 = 0}$ $\quad \vec{n_H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Infos zu Vordach (Ebene E_V):

Schnittgerade parallel zur x_1 - Achse → Koeffizient vor x_1 ist Null in Ebenengleichung

Schnittgerade in 2,5 m Höhe der x_3 - Achse → rechte Seite beachten für $x_2 = 0$

x_2 - und x_3 - Koeffizienten noch zu bestimmen → Betrachtung der Formel für Schnittwinkel; Koeffizienten entsprechen Komponenten der Normalenvektoren

$$0{,}39 = \frac{|\vec{n_H} \cdot \vec{n_V}|}{|\vec{n_H}| \cdot |\vec{n_V}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3}{1 \cdot \sqrt{0^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

$$0{,}39 = \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \quad |\,^2$$

$$0{,}39^2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 + n_3^2}$$

Es bleibt eine Gleichung mit zwei Unbekannten → eine Komponente frei wählbar, hier n_2 sinnvoll

beispielsweise: $n_2 = 1$

Daraus ergibt sich:

$$0{,}39^2 = \frac{1^2}{1^2 + n_3^2}$$
$$0{,}39^2 \cdot (1 + n_3^2) = 1$$
$$0{,}152 + 0{,}152n_3^2 = 1$$
$$0{,}152n_3^2 = 0{,}848 \quad \rightarrow \quad n_3 = \pm\sqrt{\frac{0{,}848}{0{,}152}} = \pm 2{,}36$$ (positiv betrachten genügt)

Anmerkung: Man kann auch ganz geschickt $n_2 = 0{,}39$ wählen, dann muss man nur dafür sorgen, dass der Nenner 1 wird und man somit direkt einen normierten Normalenvektor hat!

Jetzt rechte Seite der Gleichung: Ebenengleichung mit $x_2 = 0$ und $x_3 = 2{,}5$ wegen Höhe

$$E_V: x_2 \pm 2{,}36x_3 = b$$

$$0 \pm 2{,}36 \cdot 2{,}5 = b \quad \rightarrow \quad b = \pm 5{,}9$$

$$\mathbf{E_V:\ x_2 \pm 2{,}36x_3 = \pm 5{,}9} \qquad \overrightarrow{n_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 2{,}36 \end{pmatrix}$$

Zwei Möglichkeiten: $\mathbf{E_{V1}:\ x_2 + 2{,}36x_3 = 5{,}9} \qquad \mathbf{E_{V2}:\ x_2 - 2{,}36x_3 = -5{,}9}$

Arbeitsblatt 09: Punkt und Ebene - Hesse'sche Normalenform

Aufgabe 1

Abstand d zwischen Punkt A und Ebene E:

$$d = \left|\frac{e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3 - b}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}\right|$$

Formel wie Beschreibung aber neue Benennung: e_1, usw → Koeffizienten der Ebenengleichung
a_1, usw → Koordinaten des Punktes

$$d = \left|\frac{-1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 2}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{15}{\sqrt{30}}\right| = 2{,}74$$

Lotfußpunkt F mit Vektor $\vec{f}$ (Punkt A mit $\vec{a}$): $\vec{a} - d \cdot \overrightarrow{n_0} = \vec{f}$

Normalenvektor bestimmen und normieren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{30}$

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \vec{a} - d \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2{,}74 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3{,}5} \\ \mathbf{1{,}5} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Hesse'sche Normalenform: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0 \qquad \overrightarrow{n_0}$ bekannt, $\vec{p}$ wählen

$\vec{p}$ muss zu Punkt auf Ebene führen → Ebenengleichung: z.B. zwei Komponenten 0 wählen und dritte bestimmen (hier $x_1 = x_2 = 0$)

$$\rightarrow \qquad E:\ -1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ergebnis überprüfen:

$$d = \left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (-3 + 20 - 2)\right| = 2{,}74$$

Ergebnis aus Hesse'scher Normalenform stimmt mit Berechnung aus Koordinatengleichung überein!

Anmerkung: Wenn man beide Rechnungen vergleicht, erkennt man, wieso sie übereinstimmen.

Aufgabe 2

Punkt R (mit $\vec{r}$) ist Lotfußpunkt und Abstand d = 6 → normierten Normalenvektor bestimmen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \qquad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt Q mit $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{r} + d \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Höhe des Dreiecks entspricht Abstand von Punkt C zur Seite $\overline{AB}$

→ Abstandsbestimmung ähnlich wie Punkt zu Ebene, allerdings hier nur zweidimensional

- Möglichkeit 1: man beschreibt alles mit zweidimensionalen Vektoren
- Möglichkeit 2: man stellt eine Geradengleichung für Strecke $\overline{AB}$ auf (vgl. Ebenengleichung)

Möglichkeit 1 scheint naheliegender:

Normalenvektor bestimmen, der senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$ steht; dazu $\overline{AB}$ als Vektor $\vec{b}$ (Basis) ausdrücken

$$\overline{AB} = \vec{b} = \binom{5}{4} - \binom{1}{2} = \binom{4}{2}$$

Normalenvektor:

$$\vec{b}\cdot\vec{n} = 0 \quad\rightarrow\quad \binom{4}{2}\cdot\binom{n_1}{n_2} = 4n_1 + 2n_2 = 0$$

wähle $n_1 = 1 \qquad 4\cdot 1 + 2n_2 = 0 \quad\rightarrow\quad n_2 = -2$

$$\vec{n} = \binom{1}{-2}$$

Vektor normieren: $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad \vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\binom{1}{-2}$

Hesse'sche Normalenform aufstellen mit $\vec{p} = \binom{1}{2}$, Koordinaten von Punkt A

$$(\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n_0} = 0 \quad\rightarrow\quad \left(\vec{x} - \binom{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\binom{1}{-2} = 0$$

Abstand zu Punkt C (2|3) mit $\vec{c} = \binom{2}{3}$ bestimmen:

$$\mathbf{d} = |(\vec{c} - \vec{p})\cdot\vec{n_0}| = \left|\left(\binom{2}{3} - \binom{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\binom{1}{-2}\right| = \left|\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\right| = \mathbf{0{,}45}$$

→ *Anmerkung: Die Vektorrechnung gilt auch im altbekannten zweidimensionalen Koordinatensystem. Die Methoden lassen sich dort ebenso anwenden, um Probleme zu lösen.*

Arbeitsblatt 10: Punkt und Gerade - Abstandsbestimmung

Aufgabe 1

Geradengleichung aufstellen für $\overline{AC}$: Stützvektor $\vec{a}$ zu Punkt A $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix}$

Richtungsvektor Basis $\overline{AC}$ $\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}$

Ebene, die senkrecht zu Gerade g und durch Punkt B verläuft, bestimmen:

Richtungsvektor gibt Koeffizienten vor: $E: 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 = b$

Koordinaten von Punkt B einesetzen für b: $b = 6\cdot 2 + 8\cdot 2 - 4\cdot(-3) = 40$

$$E: 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 40$$

Lotfußpunkt bestimmen durch Einsetzen der Zeilen der Geraden in die Ebenengleichung:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+6k\\-4+8k\\6-4k\end{pmatrix}$$

$$E: 6\cdot(-1+6k) + 8\cdot(-4+8k) - 4\cdot(6-4k) = 40$$
$$E: -6 + 36k - 32 + 64k - 24 + 16k = 40$$
$$116k = 102 \quad\rightarrow\quad k = 0{,}879$$

Lotfußpunkt F mit $\vec{f}$: $\vec{x} = \vec{f} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix} + 0{,}879\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}274\\3{,}032\\2{,}484\end{pmatrix}$

Lot $\overline{BF}$ und Abstand d bestimmen:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4{,}274\\3{,}032\\2{,}484\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}274\\-1{,}032\\-5{,}484\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{d} = \sqrt{(-2{,}274)^2 + (-1{,}032)^2 + (-5{,}484)^2} = \mathbf{6{,}026}$$

Aufgabe 2

Man kann die beiden ersten Schritte direkt überspringen (keine orthogonale Ebene, kein Lotfußpunkt)

Lot ist Strecke $\overline{RF}$: $\begin{pmatrix}9\\a\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\7\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a-7\\1\end{pmatrix}$

$$|\overline{RF}| = d = 3 = \sqrt{2^2+(a-7)^2+1^2}$$
$$9 = 2^2+(a-7)^2+1^2$$
$$4 = (a-7)^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a=5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R(9|5|-6)}$$

oder **a = 9** (wir nehmen die erste Möglichkeit)

Gesuchte Ebene muss senkrecht zu Lot sein, da mögliche Geraden senkrecht zu Lot/Punkt sind; Lot ist folglich Normalenvektor der Ebene:

Lotvektor $\overline{RF}=\begin{pmatrix}2\\a-7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ für Koeffizienten der Ebenengleichung

$$E: 2x_1-2x_2+x_3=b$$

Punkt F liegt in Ebene; einsetzen für rechte Seite der Ebenengleichung

$$2\cdot 7-2\cdot 7+1\cdot(-7)=b=-7$$
$$\mathbf{E: 2x_1-2x_2+x_3=-7}$$

Aufgabe 3

rechtwinkliges Dreieck → Satz des Pythagoras (gilt auch im Dreidimensionalen)
$a^2 + b^2 = c^2$ auf Vektoren/Strecken in Graphik übertragen

Hypothenuse gegenüber von rechtem Winkel (Seitenlängen sind immer Beträge von Vektoren):

$$|\vec{r}-\vec{a}|$$

Katheten:

$d = |\vec{r}-\vec{f}|$ (wie in den anderen Aufgaben auch)
$|\vec{f}-\vec{a}| = |k\cdot\vec{u}|$ (aus Geradengleichung)

Gemäß Pythagoras lässt sich die Seite/der Abstand d also auch wie folgt berechnen:

$$\mathbf{d^2 = |\vec{r}-\vec{a}|^2 - |k\cdot\vec{u}|^2}$$

Anmerkung: Man muss zwar ebenfalls das k bestimmen (mit orthogonaler Ebene wie sonst auch),
spart sich jedoch die Bestimmung der Koordinaten von Punkt F und kann direkt den Abstand berechnen.

Aufgabe 4

1. Schritt bei Abstandsbestimmung:

Normalenvektor der orthogonalen Ebene ist $\vec{u}$
Koeffizienten (Komponeten von $\vec{u}$) mit Punkt R multiplizieren (Skalarprodukt) $\vec{u}\cdot\vec{r}$
Ebenengleichung lautet: $\vec{u}\cdot\vec{x}=\vec{u}\cdot\vec{r}$

2. Schritt:

Geradengleichung $g:\vec{x}=\vec{a}+k\cdot\vec{u}$ in Ebenengleichung einsetzen

$$\vec{u}\cdot(\vec{a}+k\cdot\vec{u})=\vec{u}\cdot\vec{r}$$

Alle Vektoren sind bekannt, daher kann nach k freigestellt werden. Beachte die Rechenregeln bei Skalarprodukten. Man kann ein Skalarprodukt nicht einfach „auseinander reißen" und Termumformungen wie üblich machen (beispielsweise in der Gleichung oben einfach den Vektor $\vec{u}$ auf beiden Seiten streichen). Lässt man ein Skalarprodukt zusammen, ist es jedoch nicht anders zu behandeln als eine Zahl!

$$\vec{u}\cdot(\vec{a}+k\cdot\vec{u})=\vec{u}\cdot\vec{r}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{r}$$
$$k\cdot\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{r}-\vec{u}\cdot\vec{a}$$
$$k=\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}-\vec{u}\cdot\vec{a}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Tatsächlich kann man k direkt bestimmen. Das Rechnen mit Skalarprodukten sieht ungewöhnlich aus, aber es wird nichts anderes gerechnet als:

$$k=\frac{\text{Zahl}-\text{Zahl}}{\text{Zahl}}$$

Man kann es einfach an der Beispielaufgabe ausprobieren und mit den Zahlenwerten überprüfen. Mit dieser Formel für k wird die Abstandsbestimmung formalisiert und lässt sich ohne „Arbeitsanweisungen" durchführen.

Arbeitsblatt 11: Abstand windschiefer Geraden

Aufgabe 1

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren in Gleichungssystem einsetzen für Normalenvektor:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -3n_1 & + & 4n_2 & - & 2n_3 & = & 0 & \mathrm{I} \\ 1n_1 & - & 1n_2 & - & 1n_3 & = & 0 & \mathrm{II} \end{array}$$

Wähle $n_3 = 1$

$$\begin{array}{rcrcrll} -3n_1 & + & 4n_2 & = & 2 & \mathrm{I} & \\ 1n_1 & - & 1n_2 & = & 1 & \mathrm{II} & |\,\mathrm{II}\cdot 3 + \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrll} -3n_1 & + & 4n_2 & = & 2 & \mathrm{I} & \\ & + & 1n_2 & = & 5 & \mathrm{II} & |\,\mathrm{II}\cdot 3 + \mathrm{I} \end{array}$$

$$n_2 = 5$$
$$n_1 = 6$$

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ muss normiert werden:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(6)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{62}$$
$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{62}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}_0$ in Abstandsgleichung einsetzen:

$$d = 3 = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{n_0} \right|$$
$$3 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ z+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} \right|$$
$$3 = \left| (-6 - 35 + (z+4)) \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} \right|$$
$$3 = \left| (-37 + z) \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} \right|$$
$$\sqrt{62} \cdot 3 = 23{,}62 = |-37 + z|$$

Zwei Lösungen möglich wegen des Betrags:

$$\pm 23{,}62 = -37 + z \quad \rightarrow \quad \mathbf{z_1 = 60{,}62} \text{ und } \mathbf{z_2 = 13{,}38}$$

Aufgabe 2

zunächst Richtungsvektor $\vec{b}$ der Geraden h bestimmen:

$$\vec{b} \cdot \vec{n_0} = 0 \qquad 0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} b_1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad b_1 = -4$$

Stützvektor bestimmen über Abstandsbestimmung:

$$d = 2 = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{n_0} \right|$$
$$2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 - a_2 \\ 2 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (4 - a_2) + \frac{2}{3} \cdot (2 - a_3)$$
$$2 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} a_2 - \frac{2}{3} a_3$$
$$-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3} a_2 - \frac{2}{3} a_3$$

Wähle beispielsweise $a_2 = 1$, dann ist $a_3 = \frac{3}{2}$.

$$\mathbf{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3/2} \end{pmatrix} + \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Man kann den Abstand gewohnt Schritt für Schritt bestimmen oder schaut genau hin:
→ genau hinschauen und dann mathematisch zeigen

Die Richtungsvektoren beider Geraden haben bei der zweiten Komponente eine 0. Wenn man sich vorstellt, wie die Geraden damit verlaufen, wird klar, dass die Geraden parallel verlaufen, weil sie für alle Möglichkeiten (egal welche Werte) in parallelen Ebenen liegen. Der Abstand dieser Geraden/Ebenen wird also nur über die Stützvektoren bestimmt. Hier genügt es, nur die zweite Komponente zu betrachten, da die Ebenen parallel sind. Es gilt also:

$$d = |p_2 - u_2|$$

Mathematisch:
Normalenvektor bestimmen mit Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} q_1 n_1 & + & 0n_2 & + & q_3 n_3 & = & 0 \quad \mathrm{I} \\ v_1 n_1 & + & 0n_2 & + & v_3 n_3 & = & 0 \quad \mathrm{II} \quad \left|\, \mathrm{II} - \frac{v_1}{q_1}\mathrm{I}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} q_1 n_1 & + & 0n_2 & + & q_3 n_3 & = & 0 \quad \mathrm{I} \\ & & & + & \left(v_3 - \frac{v_1}{q_1} q_3\right) n_3 & = & 0 \quad \mathrm{II} \end{array}$$

Um die zweite Gleichung zu erfüllen, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder der Ausdruck in der Klammer wird null oder $n_3 = 0$. In der Klammer steht:

$v_3 - \frac{v_1}{q_1} q_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{q_3}{q_1}$ in diesem Fall wären die Geraden parallel → wird nicht betrachtet

Also ist $n_3 = 0$ und es wird somit auch $n_1 = 0$. Komponente n_2 muss 1 sein, damit der Normalenvektor normiert ist (Betrag dann auch 1). Der Normalenvektor lautet immer

$$\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_3}{v_1} n_3 = -n_1$$

Für die Abstandsbestimmung gilt daher:

$$d = \left|\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = |(p_1 - u_1) \cdot 0 + (p_2 - u_2) \cdot 1 + (p_3 - u_3) \cdot 0|$$

$$\mathbf{d = |p_2 - u_2|}$$

Allgemein: Ist der Normalenvektor zur Abstandsbestimmung zwischen zwei Objekten (z.B. auch Punkt und Ebene) nur an einer Komponente besetzt, lässt sich der Abstand entsprechend direkt an dieser Komponente ablesen.

Klasse 12,1 - Oberthema C

Kreise und Kugeln

Arbeitsblatt 01: Kreis und Kugel im Koordinatensystem

Aufgabe 1

Vektorgleichung der Kugel in Koordinatengleichung umformen:

$$M(1|2|3)\,,\, r^2 = 4 \quad \rightarrow \quad (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 = 4$$

Punkte in Koordinatengleichung einsetzen:

Für Punkt A: $(-2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2 = 9+1+4 = \mathbf{14} > 4$ **außerhalb**

Für Punkt B: $(1-1)^2 + (4-2)^2 + (3-3)^2 = 0+4+0 = \mathbf{4}$ **auf der Kugeloberfläche**

Für Punkt C: $(0-1)^2 + (3-2)^2 + (2-3)^2 = 1+1+1 = \mathbf{3} < 4$ **innerhalb**

Aufgabe 2

Die ausmultiplizierten Gleichungen in Koordinatengleichungen mit ausgeklammerter Form bringen: (dazu quadratische Ergänzungen)

Kugel 1: $x_1^2 - 8x_1 + 16 + x_2^2 - 8x_2 + 16 + x_3^2 - 6x_3 + 9 = -16 + 16 + 16 + 9$

$$\mathbf{(x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3-3)^2 = 25}$$

Kugel 1: $M(4|4|3)$ und $r = 5$

Kugel 2: $x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 12x_2 + 36 + x_3^2 + 4x_3 + 4 = -32 + 1 + 36 + 4$

$$\mathbf{(x_1-1)^2 + (x_2-6)^2 + (x_3+2)^2 = 9}$$

Kugel 2: $M(1|6|-2)$ und $r = 3$

Abstand der Mittelpunkte:

$$d = |M_1 - M_2| = \left|\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\right|$$

$$d = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38} = \mathbf{6{,}16 < (5+3)}$$

Abstand der Mittelpunkte ist kleiner als addierte Kugelradien → Kugeln schneiden sich

Aufgabe 3

a)

Quadratische Ergänzung, damit Koordinatengleichung in ausgeklammerter Form mit binomischer Formel angegeben werden kann und Mittelpunkt ablesbar ist:

$$x_1^2 - 6x_2 + 9 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = -6 + 9 + 1$$

$$(x_1-3)^2 + (x_2+1)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad M(3|-1)$$

Mittelpunkt-Koordinaten in Geradengleichung einsetzen wegen Schnittpunkt:

$$x_2 = -2x_1 + b \quad \rightarrow \quad -1 = -2 \cdot 3 + b \quad \rightarrow \quad \mathbf{b = 5}$$

b)

Geradengleichung für x_2 in Kreisgleichung einsetzen:

$$(x_1-3)^2 + \left((-2x_1+5)+1\right)^2 = 4$$
$$(x_1-3)^2 + (-2x_1+6)^2 = 4$$
$$x_1^2 - 6x_1 + 9 + 4x_1^2 - 24x_1 + 36 = 4$$
$$5x_1^2 - 30x_1 + 41 = 0$$
$$x_1^2 - 6x_1 + \frac{41}{5} = 0$$

$$x_{1,1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{41}{5}} = 3 \pm 0{,}8944 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_{1,1} \approx 3{,}89} \text{ und } \mathbf{x_{1,2} \approx 2{,}11}$$

Die Koordinate x_2 der Schnittpunkte lässt sich z.B. mit der Geradengleichung direkt berechnen:

$$x_{2,1} = -2 \cdot 3{,}89 + 5 = -2{,}78 \quad \text{und} \quad x_{2,2} = -2 \cdot 2{,}11 + 5 = 0{,}78$$

$$\mathbf{S_1(3{,}89|-2{,}78) \text{ und } S_2(2{,}11|0{,}78)}$$

Arbeitsblatt 02: Kreise und Geraden

Aufgabe 1

Geradengleichung in Kreisgleichung einsetzen:

$$x_1^2 + (x_1+b)^2 = 9$$
$$x_1^2 + x_1^2 + 2bx_1 + b^2 = 9$$
$$2x_1^2 + 2bx_1 + b^2 - 9 = 0$$
$$x_1^2 + bx_1 + \frac{b^2}{2} - 4{,}5 = 0$$

pq-Formel: $x_{1,1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 4{,}5} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-\frac{b^2}{4} + 4{,}5}$

Ausdruck unter Wurzel (Diskriminante) betrachten:

für $-\frac{b^2}{4}+4{,}5=0$ haben Kreis und Gerade einen Schnittpunkt (Tangente)

→ $\mathbf{b=\pm\sqrt{18}}$ **Tangente**

für $-\frac{b^2}{4}+4{,}5>0$ haben Kreis und Gerade zwei Schnittpunkte (Sekante)

→ $\mathbf{|b|<\sqrt{18}}$ **Sekante**

für $-\frac{b^2}{4}+4{,}5<0$ haben Kreis und Gerade keinen Schnittpunkt (Passante)

→ $\mathbf{|b|>\sqrt{18}}$ **Passante**

Aufgabe 2

Schnittpunkte der Polaren mit Kreis bestimmen; dazu Geradengleichung umstellen und in Kreisgleichung einsetzen:

$$p: x_1+x_2=3 \;\rightarrow\; x_2=3-x_1$$

$$\begin{aligned}(x_1+2)^2+\left((3-x_1)-1\right)^2&=16\\ x_1^2+4x_1+4+(-x_1+2)^2&=16\\ x_1^2+4x_1+4+x_1^2-4x_1+4&=16\\ 2x_1^2+8&=16\\ x_1^2=4 \;\rightarrow\; \mathbf{x_{1,1/2}}&=\mathbf{\pm 2}\end{aligned}$$

x_2 - Koordinate der Schnittpunkte bestimmen mit Polare:

$$x_{2,1}=3-x_{1,1} \;\rightarrow\; \mathbf{x_{2,1}=1}$$
$$x_{2,2}=3-x_{1,2} \;\rightarrow\; \mathbf{x_{2,2}=5}$$

Die Schnittpunkte $T_1(2|1)$ und T_2 (-2|5) sind die Berührpunkte der Tangenten, die sich im Pol der Polaren treffen. Es gibt zwei Möglichkeiten fortzufahren:

- Schnittpunkte für $\vec{t}$ hier einsetzen: $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{t}-\vec{m})=r^2$
- oder hier für $\vec{x}$ einsetzen: $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})=r^2$

Jeweils erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die den Koordinaten des Pols entsprechen.
Hier Variante 1, wodurch die Tangentengleichungen bestimmt werden (Mittelpunkt des Kreises aus Kreisgleichung ablesen: $\vec{m}=\binom{-2}{1}$):

erste Tangente für T_1 (2|1) $\left(\binom{x_1}{x_2}-\binom{-2}{1}\right)\cdot\left(\binom{2}{1}-\binom{-2}{1}\right)=16$

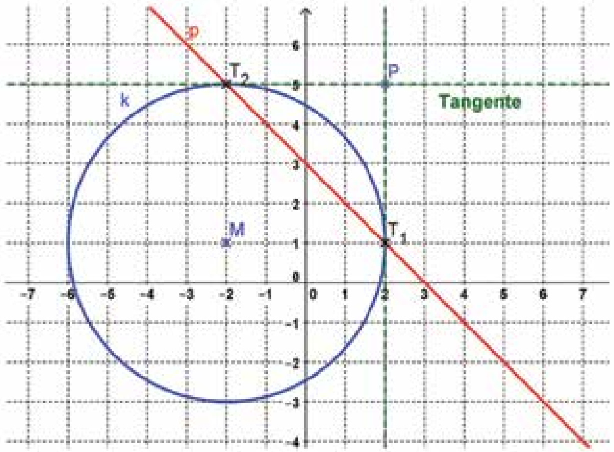
$$(x_1+2)\cdot 4+(x_2-1)\cdot 0=16 \;\rightarrow\; \mathbf{x_1=2}$$

zweite Tangente für T_2 (-2|5) $\left(\binom{x_1}{x_2}-\binom{-2}{1}\right)\cdot\left(\binom{-2}{5}-\binom{-2}{1}\right)=16$

$$(x_1+2)\cdot 0+(x_2-1)\cdot 4=16 \;\rightarrow\; \mathbf{x_2=5}$$

Die Koordinaten des Pols lauten P(2|5)

Anmerkung: In anderen Fällen müssen die Tangentengleichungen noch ineinander eingesetzt werden, um die Lösung zu bestimmen. Schaut man sich die Aufgabe graphisch an, liegt folgender Sonderfall vor (Tangenten liegen vertikal und horizontal):

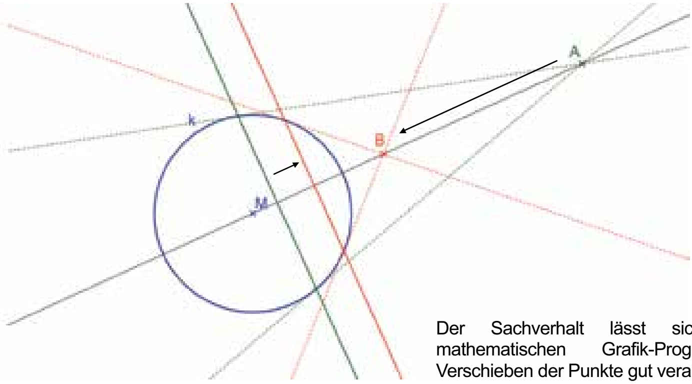


Aufgabe 3

Polgerade entfernt sich vom Mittelpunkt → Abstand von Pol und Mittelpunkt wird kleiner

Extremfälle:

- Polgerade verläuft durch Mittelpunkt → Tangenten sind parallel; Abstand von Pol und Mittelpunkt ist unendlich
- Polgerade verläuft auf Kreislinie/Rand → Polgerade entspricht Tangente, Pol und Polgerade fallen zusammen; Abstand von Pol und Mittelpunkt entspricht Radius



Der Sachverhalt lässt sich in einem mathematischen Grafik-Programm durch Verschieben der Punkte gut veranschaulichen!

Arbeitsblatt 03: Kugeln und Ebenen

Aufgabe 1

Lotvektor zu Ebenengleichung E : $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = b$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d = \left| \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_2 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

$$6 = \left| \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - b}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right|$$

$$6 = \left| \frac{1 - b}{\sqrt{9}} \right|$$

$$18 = |1 - b| \quad \rightarrow \quad b = 19 \quad \text{oder} \quad b = -17$$

Aufgabe 2

Punkt auf Ebene: verschiedene Wege, entweder $|\vec{t} - \vec{m}|$ bestimmen oder einsetzen
hier Einsetzen leichter:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 + x_3^2 = 25 \rightarrow (4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + 4^2 = 25 \rightarrow \textbf{stimmt}$$

Bestimmung der Tangentialeben ebenfalls auf zwei Arten möglich, entweder gemäß Formel oder Normalenvektor bestimmen. Formel leicht doch Rechenaufwand höher. Klassische Methode mit Normalenvektor lässt sich mit den bekannten Methoden gut schnell anwenden:

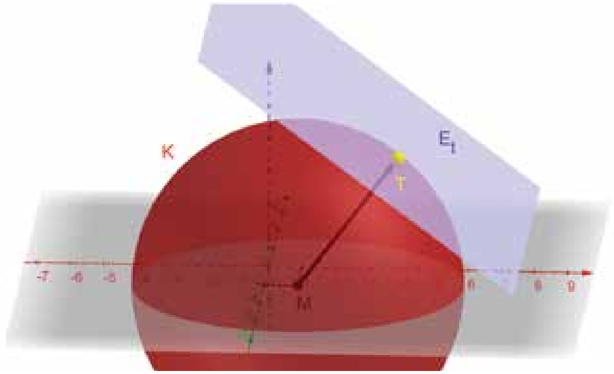
Tangentialebene liegt normal zur Strecke vom Mittelpunkt zum Berührpunkt T, entspricht Lot (vgl. Beispielaufgabe). Für Koordinatengleichung der Ebene den Normalenvektor bestimmen:

Normalenvektor/Lot: $\vec{n} = \overrightarrow{MT} = \vec{t} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Daraus Gleichung der Tangentialebene : E_t: $3x_1 + 4x_3 = b$

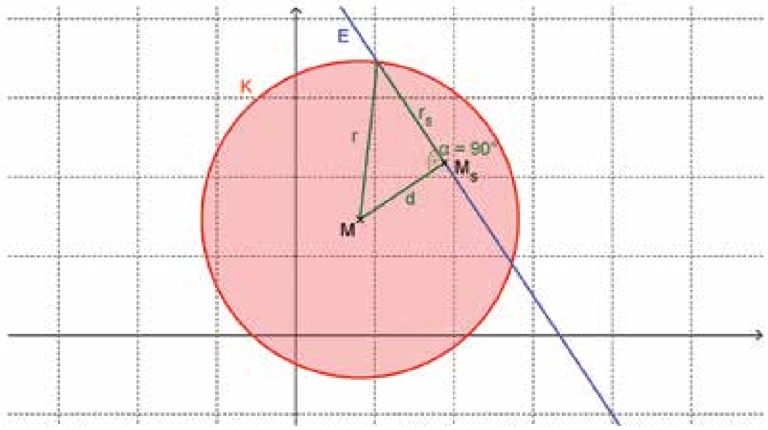
b bestimmen durch Einsetzen von T : $3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = b \rightarrow b = 28$

$$\mathbf{E_t: 3x_1 + 4x_3 = 28}$$



Aufgabe 3

Kugel in Schnittperspektive betrachten:



Deutlich erkennbar ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten r, r_s, d . Es gilt der Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck:

$$r^2 = r_s^2 + d^2$$
$$r_s = \sqrt{r^2 - d^2}$$

Arbeitsblatt 04: Polarebenen bei Kugeln und Geraden

Aufgabe 1

Zunächst Abstand zwischen Punkt P und Kugelmittelpunkt M bestimmen, Punkt P muss außerhalb liegen:

$$|\vec{p} - \vec{m}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Abstand ist größer als Radius der Kugel (r = 3) ; Punkt P als Pol annehmen.

$$E_p: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$

$$E_p: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 9$$

$$E_p: \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 9$$

$$E_p: 3x_1 - 4x_2 = 2$$

Aufgabe 2

Polarebene: E_p: $-5x_1 - 4x_2 + x_3 = -8$

Kugel: Mittelpunkt M(2|2|1) und Radius r = 3

Zusammenhang zwischen Gleichung der Polarebene und Angaben zur Kugel herstellen:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 9$$

$$(x_1 - 2)(p_1 - 2) + (x_2 - 2)(p_2 - 2) + (x_3 - 1)(p_3 - 1) = 9$$

$$(p_1 - 2)x_1 - 2p_1 + 4 + (p_2 - 2)x_2 - 2p_2 + 4 + (p_3 - 1)x_3 - p_3 + 1 = 9$$

$$(p_1 - 2)x_1 + (p_2 - 2)x_2 + (p_3 - 1)x_3 = 2p_1 + 2p_2 + p_3$$

Polarebene bekannt, daher kann ein Koeffizientenvergleich stattfinden:

$$-5x_1 = (p_1 - 2)x_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p_1 = -3}$$

$$-4x_2 = (p_2 - 2)x_2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p_2 = -2}$$

$$x_3 = (p_3 - 1)x_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p_3 = 2}$$

rechte Seite der Gleichung kann noch als Kontrolle verwendet werden:

$$-8 = 2p_1 + 2p_2 + p_3 \qquad -8 = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \qquad -8 = -8$$

Pol $\mathbf{P(-3|-2|2)}$

Aufgabe 3

Liegen nur Parallelen zur Tangente vor, bilden diese keinen Tangentialkegel sondern einen Tangentialzylinder. Die Ebene, in der alle Berührpunkte liegen, muss demnach durch den Kugelmittelpunkt verlaufen. Verläuft die **Ebene durch den Kugelmittelpunkt**, kann es sich **nicht um eine Polarebene handeln**. Der **Pol müsste unendlich weit entfernt** liegen.

StrandMathe

Meer fürs Denken

Das Übungsheft

Oberstufe

Teil 4

Lösungen

Super Lernvideos zu allen Aufgaben bei YouTube

Klasse 12,2 - Oberthema A

Geometrische Abbildungen und Matrizen

Arbeitsblatt 01: Geometrische Abbildungen und Abbildungsgleichungen

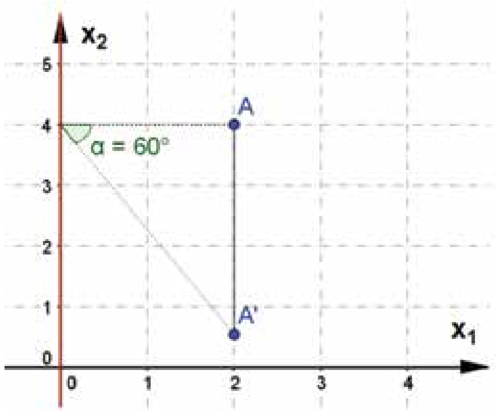
Aufgabe 1

a) $\delta: \begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ b) $\alpha: \begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = 3x_2 \end{cases}$

c) $\gamma: \begin{cases} x_1' = x_1 + a \\ x_2' = x_2 + b \end{cases}$ d) $\beta: \begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Aufgabe 2

$$\alpha: \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -\tan(60°) \cdot x_1 + x_2 \end{cases}$$



Aufgabe 3

Zuerst wird die Vokabel zum Fixpunkt $\begin{matrix} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{matrix}$ benutzt und auf die Abbildungsgleichung

$\alpha: \begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ angewendet: $\begin{matrix} x_1' = 2x_2' \\ x_2' = x_1' + x_2' \end{matrix}$ $\quad | - x_2'$ umformen ergibt: $\begin{matrix} x_1' = 2x_2' \\ 0 = x_1' \end{matrix}$

daraus folgt $\begin{matrix} 0 = 2x_2' \\ 0 = x_2' \end{matrix}$ also ist der Ursprung P(0/0) ein Fixpunkt der Abbildung.

Für die Bestimmung der Fixgeraden wendet man zunächst dasselbe Verfahren auf eine allgemeine Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ an, wobei man für den Stützvektor der Geraden direkt den Fixpunkt einsetzen kann. Dabei kann man die Schreibweise als Gleichungssystem benutzen: $\begin{matrix} x_1 = r \cdot b_1 \\ x_2 = r \cdot b_2 \end{matrix}$.

Das Einsetzen in die Abbildungsgleichung ergibt: $\begin{matrix} x_1' = 2 \cdot (r \cdot b_2) \\ x_2' = r \cdot b_1 + r \cdot b_2 \end{matrix}$

umgeformt: $\begin{matrix} x_1' = 2rb_2 \\ x_2' = r \cdot (b_1 + b_2) \end{matrix}$

und in Vektorschreibweise: $\vec{x'} = r \cdot \begin{pmatrix} 2b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

Wir suchen jetzt also die Koordinaten des Richtungsvektors $\vec{b}$ und der muss diese Bedingung erfüllen: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$.

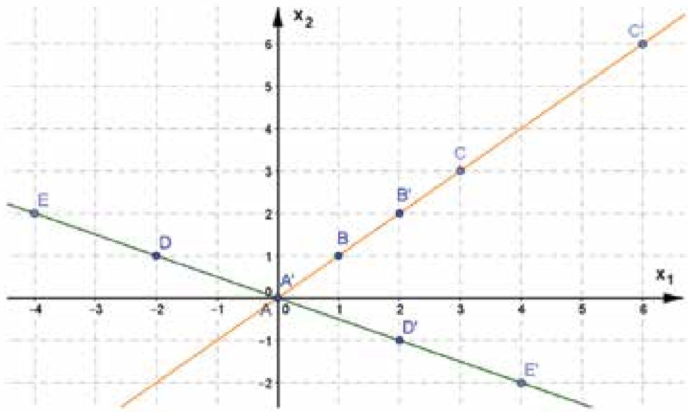
Setzt du die erste in die zweite Zeile ein, erhältst Du: $\begin{matrix} b_1 = 2sb_2 \\ b_2 = s \cdot (2sb_2 + b_2) \end{matrix}$ und nun brauchen wir eine Lösung für die zweite Gleichung $b_2 = 2s^2b_2 + sb_2$. Wäre jetzt $b_2 = 0$ wäre auch $b_1 = 0$, diese Lösung nennt man trivial, weil sie immer zu einer Lösung des Gleichungssystems führt. Stattdessen wählt man $b_2 = 1$ und erhält: $1 = 2s^2 + s$. Das ist wiederum eine quadratische Gleichung, also müssen wir zur Normalform umstellen und mit der pq-Formel auflösen: $0 = s^2 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}$

$s_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$ die Lösungen sind dann: $\begin{matrix} s_1 = \frac{1}{2} \\ s_2 = -1 \end{matrix}$

Diese beiden Werte sowie $b_2 = 1$ setzt man jetzt einzeln in den Ansatz $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

ein und erhält $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ b_1 + 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \end{matrix}$ $\qquad g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

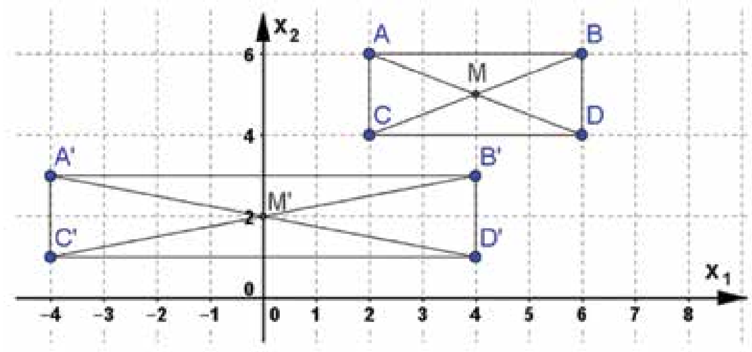
und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ b_1 + 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = -2 \\ b_2 = 1 \end{matrix}$ $\qquad g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Arbeitsblatt 02: Affine Abbildungen

Aufgabe 1

Affine Abbildungen sind geradentreu und umkehrbar. Da der Schnittpunkt der Diagonalen in einem Rechteck der Mittelpunkt der Diagonalen ist, sind diese beiden Bedingungen erfüllt.



Außerdem lässt sich Parallelentreue implizieren, weil hätten angenommen die Bilder zweier paralleler Geraden einen Schnittpunkt, dann müsste es ja für diesen Schnittpunkt zwei Urbilder geben und das wiederum widerspricht der Umkehrbarkeit.

Aufgabe 2

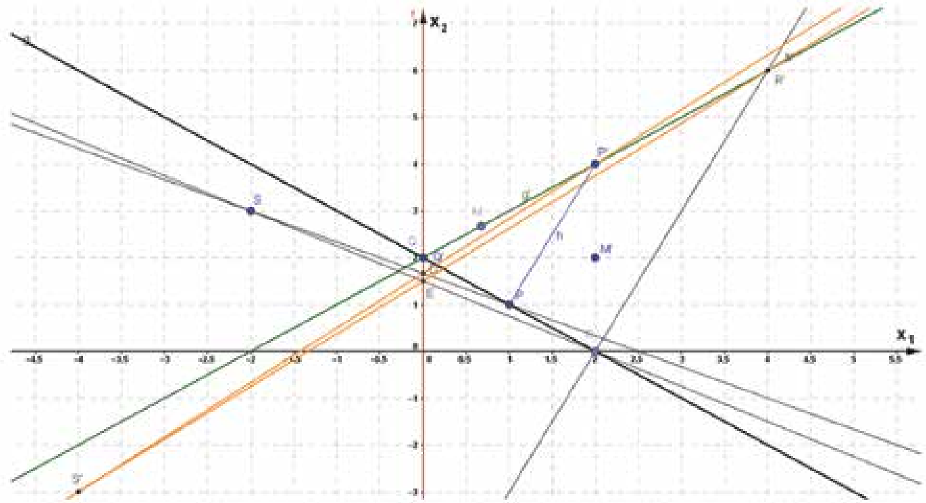
a) Q ist ein Punkt auf der x_2-Achse und somit ein Fixpunkt. Das Urbild der Geraden g' (durch P' und Q') ist die Gerade g. Sie verläuft durch P und Q.

b) R liegt auf g. Also muss R' auf g' liegen. Da P auf P' abgebildet wird, ist R der Schnittpunkt der Parallelen zu PP' durch R und g'.

c) Um S' zu bestimmen, muss man als erstes die Geraden durch S und P sowie von S und R einzeichnen. Dadurch „bindet man den Punkt S in die Abbildung ein", macht also die Abbildungsgleichung in Bezug auf S sichtbar. Die beiden Geraden schneiden die x_2-Gerade in Punkt D und E. Diese sind Fixpunkte. Verbindet man jetzt diese Fixpunkte mit den Bildpunkten von P und R, ist der Schnittpunkt der beiden Geraden S'.

d) M' ist nicht Teil der Abbildung, weil M auf g' liegt, M' aber nicht auf g.

In der Grafik weiter unten kann man kaum noch was erkennen. Schau dir das Video an, denn da kann ich dir alles Schritt-für-Schritt und übersichtlich zeigen.



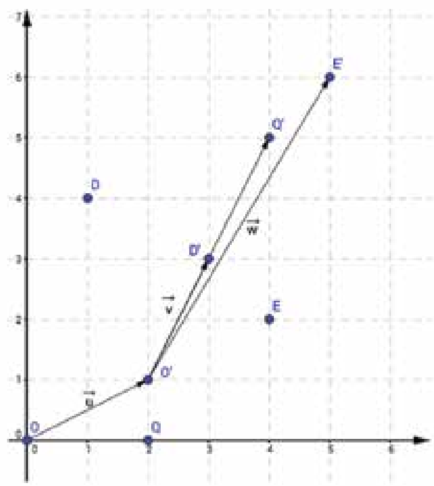
Aufgabe 3

Das Viereck BDEF ist geraden- und parallelentreu, CAGH ist dies nicht.

Arbeitsblatt 03: Affine Abbildungen durch Matrizen

Aufgabe 1

Zeichnung:



Als erstes bilden wir die Vektoren:

$\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{O'D'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{O'E'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

und stellen die Gleichung der Abbildung in Matrixschreibweise auf:

$\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem aufgeschrieben:

$x_1' = 1x_1 + 3x_2 + 2$
$x_2' = 2x_1 + 5x_2 + 1$

Aufgabe 2

Q' berechnen wir, indem wir Q in die Matrixgleichung einsetzen:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

g' berechnen wir, indem wir die Geradengleichung in die Abbildungsgleichung einsetzen.

$$g': \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\left(A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}' = \begin{pmatrix} 14 \\ 24 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 6r \\ 25 + 11r \end{pmatrix}$$

in Geradenschreibweise: $\vec{g}': \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

a) Aus dem Ansatz $P: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $Q: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgt das Gleichungssystem:

$$P: \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ 2c + 3d = 7 \end{cases}$$
$$Q: \begin{cases} 0a + 2b = 3 \\ 0a + 2d = 3 \end{cases}$$

aus Q folgt: $Q: \begin{cases} 0a + 2b = 3 \\ 0a + 2d = 3 \end{cases}$

Lösungen dieses Systems sind: $\begin{matrix} b = 1{,}5 \\ d = 1{,}5 \end{matrix}$ einsetzen in P ergibt:

$$2a + 3 \cdot 1{,}5 = 4 \rightarrow a = -\tfrac{1}{4}$$

$$2c + 3 \cdot 1{,}5 = 7 \rightarrow c = \tfrac{5}{4}$$

Somit folgt die Abbildungsgleichung in Matrixschreibweise: $\alpha: \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 1{,}5 \\ 1{,}25 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

b) Scherung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten ist $x_1 = x_2$. Damit wird P(1/1) auf sich selbst abgebildet und es ergibt sich der Ansatz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und damit das Gleichungssystem $\begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 1 \\ 2a + 3b = 3 \\ 2c + 3d = 7 \end{cases}$

$$2\,(1 - b) + 3b = 3 \ \Rightarrow \ b = 1 \text{ und somit } a = 0$$
$$2\,(1 - d) + 3d = 7 \ \Rightarrow \ d = 5 \text{ und somit } c = -4$$

und damit erhalten wir die Abbildung: $\alpha: \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

c) Mit dem Ansatz: $\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \end{cases}$ ergibt sich das LGS: $\begin{cases} a = 1 \\ c = 0 \\ 2a + 3b = 3 \rightarrow b = \frac{1}{3} \\ 2c + 3d = 7 \rightarrow d = \frac{7}{3} \end{cases}$

und damit die Matrix: $\alpha: \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Arbeitsblatt 04: Spezielle Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

Aufgabe 1

a) Die Matrix lautet: $\alpha: \vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Setzt man A in die Gleichung ein, erhält man A': $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Analog läuft das mit den anderen drei Punkten:

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \vec{c}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \vec{d}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix lautet: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Ortsvektoren zu den Bildpunkten:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Die Matrix lautet: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -\sin(60°) \\ \sin(60°) & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und die zugehörigen Bildpunkte:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}299 \\ 2{,}482 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}567 \\ 1{,}982 \end{pmatrix}$$

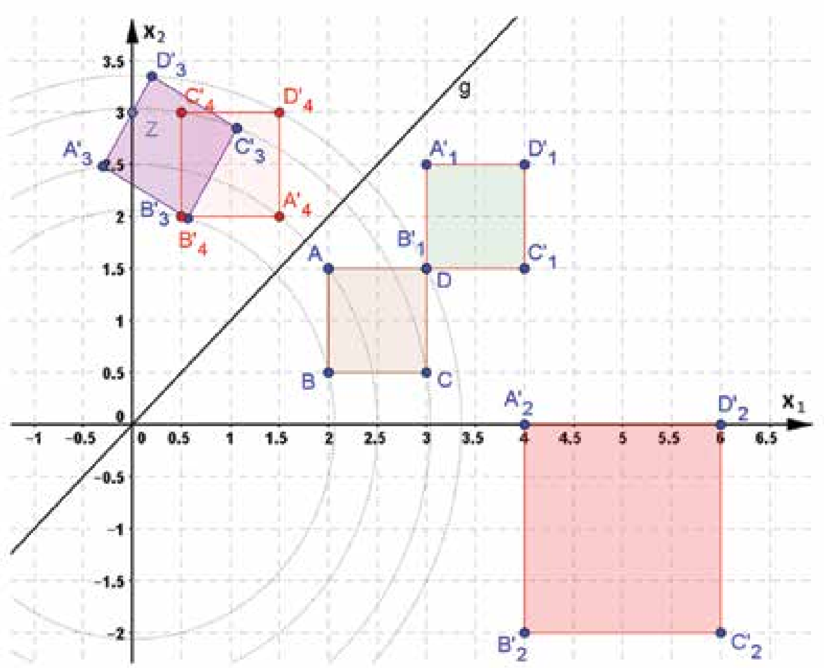
$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}067 \\ 2{,}848 \end{pmatrix},$$

$$\vec{d}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}201 \\ 3{,}348 \end{pmatrix}$$

d) Die Spiegelachse hat die Steigung 1, daraus folgt der Steigungswinkel mit $\tan(\varphi) = 1$: $m = 1 \rightarrow \varphi = 45°$.
Das Einsetzen in die Matrix für Spiegelungen an Ursprungsgeraden ergibt: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
und daraus folgen durch Einsetzen die Ortsvektoren der Bildpunkte:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2

Zuerst wird die Steigung von g bestimmt: $m = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$

Danach die Spiegelmatrix aufgestellt: $M = \begin{pmatrix} \cos\left(2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) & \sin(2 \cdot 26{,}56°) \\ \sin(53{,}12°) & -0{,}6 \end{pmatrix}$

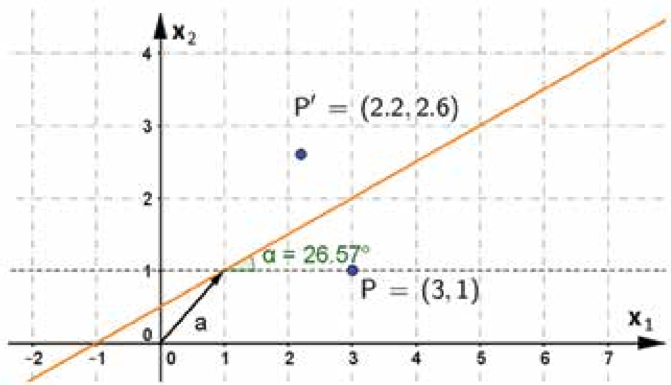
Als Drittes dann der Spezialansatz ausgeführt: $\vec{x}' = M \cdot \vec{x} - M \cdot \vec{a} + \vec{a}$

Der Vektor $\vec{a}$ ist dabei quasi ein Stützvektor zum „neuen“ Ursprung.

konkret: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

In diese Abbildungsgleichung wird dann wie bekannt der zu spiegelnde Punkt eingesetzt:

$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow P'(2{,}2/2{,}6)$



Arbeitsblatt 05: Verkettung affiner Abbildungen Matrizenprodukt

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2{,}5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

γ: $\vec{x}' = B \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

analog: γ: $\vec{x}' = A \cdot B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Aufgabe 3

Abbildung α sei die Spiegelung mit: $\vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ mit φ = 39,81°, weil die Steigung der Ursprungsgeraden $m = \frac{5}{6}$ und tan⁻¹(m) ≈ 39,81 .

$$\alpha\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}984 \\ 0{,}984 & -0{,}18 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{und} \quad \beta\colon \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}679 & -0{,}734 \\ 0{,}734 & 0{,}679 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Abbildung β sei die Drehung um φ = 47,26°, mit $\vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

$$\alpha \circ \text{b}\colon\ \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}679 & -0{,}734 \\ 0{,}734 & 0{,}679 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}984 \\ 0{,}984 & -0{,}18 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b} \circ \alpha\colon\ \vec{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}984 \\ 0{,}984 & -0{,}18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}679 & -0{,}734 \\ 0{,}734 & 0{,}679 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}844 & 0{,}536 \\ 0{,}536 & -0{,}844 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}844 & 0{,}536 \\ 0{,}536 & -0{,}844 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}139 \\ 1{,}527 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 06: Umkehrabbildungen Determinanten von Abbildungen

Aufgabe 1

Hier geht es um die Erkenntnis, dass es entscheidend ist, wie Abbildungen verknüpft sind. Die Abbildungen selber sind hier genau die aus der Beispielaufgabe. Als erstes stellen wir die Gleichung nach γ um:eingesetzt:

$$\beta \circ \gamma = \alpha \iff \beta^{-1} \cdot \beta \circ \gamma = \beta^{-1} \cdot \alpha \iff \gamma = \beta^{-1} \cdot \alpha$$

und bestimmen nun die angegebene Inverse

$$D_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 \iff B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das benötigte Matrixprodukt für

$$\gamma = \beta^{-1} \cdot \alpha \iff B^{-1} \cdot A$$

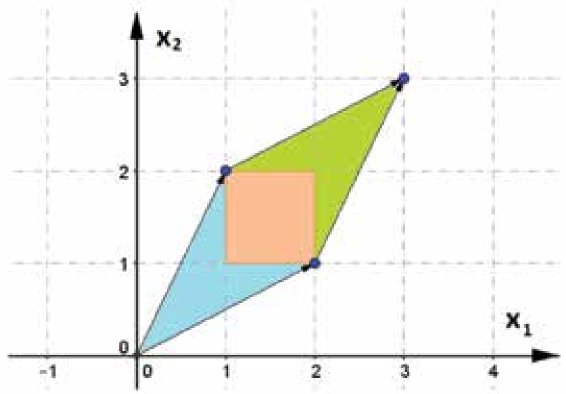
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

also gilt: $\gamma\colon\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus der Beispielaufgabe vergleicht, erkennt man den Unterschied.

Aufgabe 2

Man bestimmt die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $D_A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$ und erhält durch Einsetzen in die Formel für die inverse Matrix $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.



Jede Farbe im Parallelogramm steht für 1 FE, sodass man gut erkennen kann, dass der Flächeninhalt dem Betrag der Determinante entspricht. Die Spaltenvektoren von A spannen das Parallelogramm auf.

Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Determinante $D_B = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$. Wir interpretieren: Es gibt keine inverse Matrix zu B und es kann natürlich auch kein Parallelogramm durch die Spaltenvektoren aufgespannt werden, da diese identisch sind.

Aufgabe 3

Aus der Vokabel $\alpha^{-1}\colon \vec{x'} = A^{-1} \cdot \vec{x}$ und der Determinante $D_A = 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 = -11$ erhalten wir die Inverse von A. Nämlich $A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und kennen somit die Umkehrabbildung: $\alpha^{-1}\colon \vec{x}' = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Für die zweite Abbildungsgleichung $\beta_2 : \vec{x'} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ berechnen wir zunächst die Determinante der Matrix $D_B = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 15$ und bestimmen damit die inverse:

$B^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Um jetzt auch noch die Verschiebung umzukehren, multiplizieren wir den Gegenvektor der Verschiebung mit der inversen Matrix und erhalten:

$$\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-9\\ 6\end{pmatrix}$$

Daraus setzen wir dann die Umkehrabbildung zusammen:

$$\beta_2^{-1}: \vec{x}' = \frac{1}{15}\cdot\left(\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}-9\\ 6\end{pmatrix}\right).$$

Denn allgemein gilt für eine Abbildung, bei der der Ursprung kein Fixpunkt ist:

$$\alpha: \vec{x'} = A\cdot\vec{x}+\vec{c} \quad\Rightarrow\quad \alpha^{-1}: \vec{x'} = A^{-1}\cdot\vec{x}-A^{-1}\cdot\vec{c}$$

Arbeitsblatt 07: Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 1

a) Ansatz und charakteristisches Polynom: $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x} \;\rightarrow\; 0=\lambda^2-5\lambda+5$

Lösungen des Ansatzes sind die Eigenwerte:
$$\lambda_{1,2}=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-5}$$
$$\lambda_1=2{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2=2{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Zur Bestimmung der Eigenvektoren werden die Eigenwerte in den Ansatz eingesetzt und das entstehende LGS aufgelöst.

Für den ersten Eigenwert ergibt sich: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\left(2{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\vec{x}$ und daraus:

$$\begin{cases}2x_1+x_2=\left(2{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_1\\ x_1+3x_2=\left(2{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_2\end{cases}$$

Umformung mit $-2x_1$ in der ersten Zeile führt zu: $\begin{cases}x_2=\left(0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_1\\ x_1+3x_2=\left(2{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_2\end{cases}$

Man wählt x_1 = t und daraus folgt: $x_2=\left(0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot t$

Damit ist der Eigenvektor ermittelt: $\vec{u}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$.

Analog dazu wird mit dem zweiten Eigenwert der zweite Eigenvektor ausgerechnet und damit die zweite Fixgerade:

$$\begin{cases}2x_1+x_2=\left(2{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_1\\ x_1+3x_2=\left(2{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=\left(0{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_1\\ x_1+3x_2=\left(2{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot x_2\end{cases}$$

$x_1 = t$

$$x_2=\left(0{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot t$$

$$\vec{u}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

c) Die erste Fixgerade durch den Ursprung lautet also: $f_1: \vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

Jetzt ist noch die Frage zu klären, ob es zu dieser Geraden noch parallele Fixgeraden gibt. Dazu setzen wir P(u/v) in die Abbildungsgleichung ein und erhalten dessen Bildpunkt:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u & +v\\ u & +3v\end{pmatrix} \;\rightarrow\; P'(2u+v/u+3v)$$

Wenn jetzt der Verbindungsvektor von P zu P' parallel zum Richtungsvektor der Fixgeraden ist, ist jede Parallele zur Fixgeraden durch den Ursprung auch Fixgerade. $\overrightarrow{PP'}=\begin{pmatrix}u+v\\ u+2v\end{pmatrix}$

Es muss also ein u und ein v gefunden werden, sodass $\begin{pmatrix}u+v\\ u+2v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$ gilt.

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\begin{cases}u\approx 0{,}382\\ v\approx 0{,}618\end{cases}$. Damit ist jede zu $f_1: \vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$ parallele Gerade eine Fixgerade der Abbildung.

Nun noch die Prüfung für den zweiten Eigenvektor:

$$f_2: \vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u & +v\\ u & +3v\end{pmatrix} \;\rightarrow\; P'(2u+v/u+3v)$$

Wenn jetzt der Verbindungsvektor von P zu P' parallel zum Richtungsvektor der Fixgeraden ist, ist jede Parallele zur Fixgeraden durch den Ursprung aus Fixgerade. $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} u+v \\ u+2v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u+v \\ u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u = 2{,}618 \\ v = -1{,}618 \end{cases}$$

Damit ist jede zu $f_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ parallele Gerade Fixgerade der Abbildung.

Aufgabe 2

Führe die Berechnungen wie in Aufgabe 1 durch.

Für: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $\quad \lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$,

$g_1: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ $\quad$ bzw. $g_1: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ $\quad$ bzw. $g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Für: $\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $\quad \lambda_1 = \frac{-\sqrt{5}-5}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-5}{2}$,

$g_1: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ $\quad$ bzw. $g_1: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ $\quad$ bzw. $g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Hinweis: https://matrixcalc.org/de/vectors.html
Hier kannst du dir zu beliebigen Matrizen die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen lassen.

Aufgabe 3

$$0 = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1$$
$$0 = \lambda^2 - (a_1 + b_2) \cdot \lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

a) Einfachste Lösung für den Ansatz $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ ist sicherlich $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; findest du weitere? Durch Einsetzen in die obige Gleichung und „passend machen“ mit den Werten a_2 und b_1 lassen sich weitere Matrizen finden.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Das charakteristische Polynom hat keine Lösungen.

Arbeitsblatt 08: Parallelprojektionen

Aufgabe 1

Als erstes müssen wir die Projektionsmatrix aus dem Ansatz $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2{,}53 \\ 4{,}71 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ermitteln,

indem wir das Gleichungssystem lösen: $\begin{cases} 1 - 2{,}53t = 0 \rightarrow t = 0{,}395 \\ 4{,}71t = x_2 \\ 0 = x_3 \end{cases}$

daraus folgt: 4,71 · 0,395 = x_2 = 1,862 und damit ist die Projektionsmatrix gefunden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1{,}862 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn man will kann man diese auch zweidimensional schreiben: $P_1 = \begin{pmatrix} 1{,}862 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Bildpunkte berechnen sich dann durch Multiplizieren der Projektionsmatrix mit dem Ortsvektor zu den Punkten A, B, C und D:

$\vec{a}' = P \begin{pmatrix} 7{,}76 \\ -6{,}93 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}' = P \begin{pmatrix} 5{,}44 \\ -10{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}59 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{c}' = P \cdot \begin{pmatrix} 4{,}06 \\ -7{,}23 \\ 5{,}53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}32 \\ 5{,}53 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d}' = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5{,}87 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5{,}87 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Hier kommt jetzt das vom Trainer angekündigte Beispiel mit dem Rückgriff auf zentrische Streckung und Drehung. Der Punkt E_3 wird mit k = 0,5 vom Ursprung aus gestreckt und um 120° gedreht. Für diese Formulierung der Projektion eignet sich dieser Ansatz:

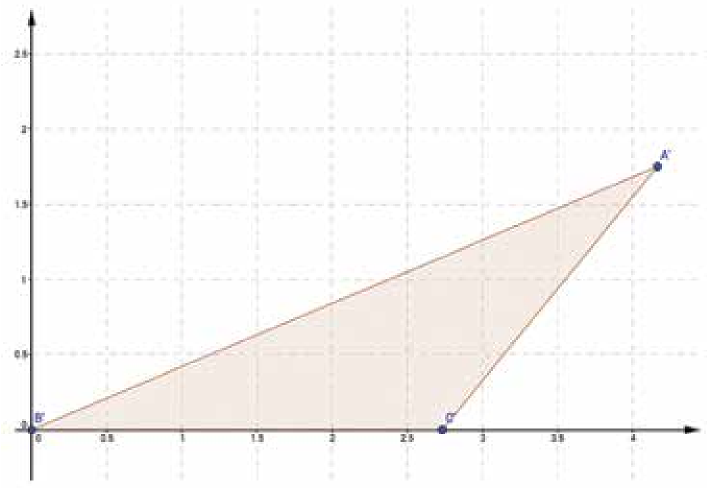
$$\begin{cases} E_1(1/0/0) \rightarrow E_1{}'(1/0/0) \\ E_2(0/1/0) \rightarrow E_2{}'(0/1/0) \\ E_3(0/0/1) \rightarrow E_3'(0{,}5\sin(120°)/0{,}5\cos(120°)/0) \end{cases}$$

aus dem direkt die Projektionsmatrix folgt: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Jetzt können wir die Bildpunkte ermitteln:

$\vec{a}' = P \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}165 \\ 1{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}' = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c}' = P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}732 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3



Klasse 12,2 - Oberthema B

Prozesse und Matrizen

Arbeitsblatt 01: Prozesse mit Matrizen beschreiben

Aufgabe 1

a)

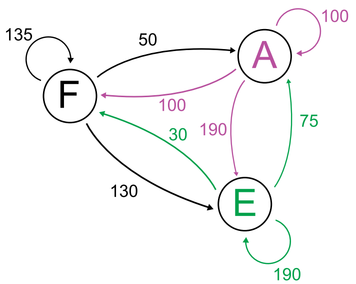
Wenn man alle Werte in der Tabelle addiert, muss man die Gesamtanzahl der Haushalte erhalten.

$m_{23} = 1000 - (135 + 100 + 30 + 50 + 100 + 130 + 190 + 190) = 75$

b)

Die 130 steht für die Anzahl der Kunden, die bislang Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen bezogen haben und im nächsten Jahr zu Strom aus erneuerbaren Energiequellen wechseln.
Die 30 steht für Kunden, die nach einem Jahr von Strom aus erneuerbaren Energien zu Strom aus fossilen Brennstoffen wechseln.

c)



d)

Um die Verteilung nach einem Zeitschritt (in diesem Fall ein Jahr) zu berechnen, müssen wir als erstes berechnen, wie groß die Anteile der wechselnden Kunden an der Gesamtanzahl der Kunden der einzelnen Sektoren (Fossil, Atom, Erneuerbar) sind. Daraus ergibt sich die Austauschmatrix. Diese wird im nächsten Schritt mit der Anfangsverteilung multipliziert und es ergibt sich die Verteilung nach einem Jahr:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{135}{315} & \frac{100}{390} & \frac{30}{295} \\ \frac{50}{315} & \frac{100}{390} & \frac{75}{295} \\ \frac{130}{315} & \frac{190}{390} & \frac{190}{295} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 315 \\ 390 \\ 295 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 225 \\ 510 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a)

$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$

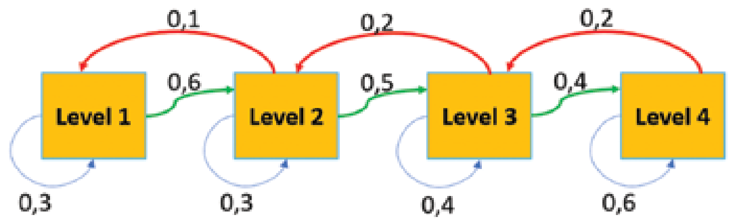
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 25 \\ 160 & 220 & 180 \\ 80 & 90 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 25 \\ 160 & 220 & 180 \\ 80 & 90 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28500 \\ 179400 \\ 75300 \end{pmatrix}$$

Gehäuse = 28.500 € Technik = 179.400 €
Montage = 75.300 € Gesamt = 283.200 €

Aufgabe 3



Als Matrix geschrieben:

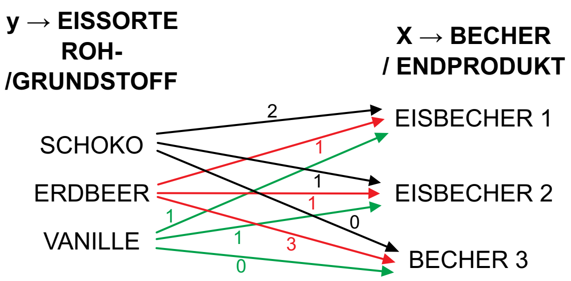
$$\vec{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_t$$

Startvektor $\vec{x}_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ somit $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}38 \\ 0{,}37 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}088 \\ 0{,}293 \\ 0{,}373 \\ 0{,}246 \end{pmatrix}$

Der letzte Vektor zeigt die Wahrscheinlichkeiten, zu denen nach drei Spielrunden ein bestimmtes Level erreicht wird. Zu ca. 24,6 % hat man also bereits das vierte Level erreicht. Zu ca. 8,8 % und somit sehr unwahrscheinlich, befindet man sich wie zum Start im ersten Level.

Aufgabe 4

Um den Übergangsgraphen aus der Tabelle zu erstellen, schreibt man die Namen der Zeilen und Spalten jeweils untereinander in zwei Blöcke. Danach verbindet man die einzelnen Elemente durch Pfeile. Als letztes schreibt man die Zahlen an die Pfeile.



Als Gleichungssystem geschrieben: $\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ y_2 &= 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \end{aligned}$

Als Matrix geschrieben: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 \\ 1x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$ bzw.: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Um zu errechnen, wie viele Kugeln jeder Sorte man für die gegebene Bestellung braucht, setzt man den „Bestellvektor" für x in die Gleichung ein und erhält:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 40 & + & 1\cdot 30 + & 0\cdot 60 \\ 1\cdot 40 & + & 1\cdot 30 + & 3\cdot 60 \\ 1\cdot 40 & + & 1\cdot 30 + & 0\cdot 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 250 \\ 70 \end{pmatrix}$$

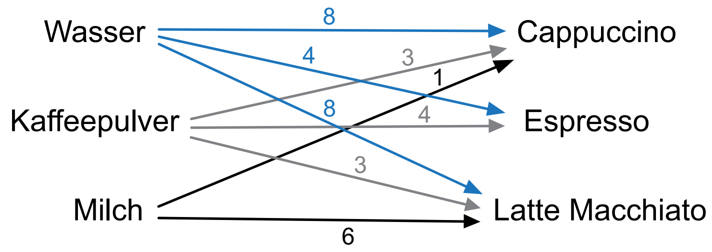
Also müssen 110 Kugeln Schokoladeneis, 250 Kugeln Erdbeereis und 70 Kugeln Vanilleeis bereitgestellt werden.

Aufgabe 5

Als Gleichungssystem: $\begin{cases} y_1 = 8x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ y_2 = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ y_3 = x_1 + 0x_2 + 6x_3 \end{cases}$

In Matrixschreibweise: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Als Übergangsgraph:



Um auf die benötigten Zutaten zu kommen, multipliziert man die Übergangsmatrix mit dem Bedarfsvektor und erhält: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 70 \\ 78 \end{pmatrix}$

Also muss man 160 cm³ Wasser, 70 cm³ Kaffeepulver und 78 cm³ Milch bereitstellen.

Um die Kosten der Bestellung zu erhalten, multiplizieren wir den Bedarfsvektor mit dem Preisvektor und erhalten: $\vec{k} = \vec{y} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 160 \\ 70 \\ 78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}001 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 1480{,}16ct \to 14{,}80€$

Arbeitsblatt 02: Zweistufige Prozesse der linearen Verflechtung

Aufgabe 1

Befasse dich mit den Formaten der angegebenen Matrizen. So kannst du bereits vorab unmögliche Multiplikationen ausschließen. Bei der Matrizenmultiplikation gilt: „Zeilen mal Spalten – Teilergebnisse summieren und das Ergebnis spaltenweise ausfüllen."

$D \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

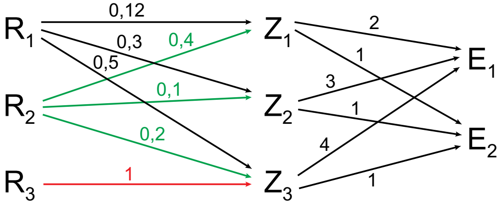
$E \cdot D \to 2 \times 3 \cdot 2 \times 2$ $\quad D \cdot F \to 2 \times 2 \cdot 3 \times 3$ $\quad F \cdot D \to 3 \times 3 \cdot 2 \times 2$

$E \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 14 \\ 45 & 43 & 41 \end{pmatrix}$

und $F \cdot E \to 3 \times 3 \cdot 2 \times 3$

Aufgabe 2

Den Übergangsgraphen kann man zeichnen, indem man ganz links die drei Rohstoffe, in der Mitte die drei Zwischenprodukte und am Ende die zwei Endprodukte notiert. Die 0,12 in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix liest man sich „im Kopf“ dann mit ihrer Bedeutung vor: „Für Zwischenprodukt 1 benötige ich 0,12 Einheiten von Rohstoff 1. Also zeigt der Pfeil von Rohstoff 1 zu Zwischenprodukt 1 und die 0,12 schreibt man an den Pfeil. Die 0,3 bedeutet dann: Für Zwischenprodukt 2 benötige ich 0,3 Einheiten von Rohstoff 1 und so weiter.



Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix erhält man, indem man die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix mit der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix multipliziert:

$$C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}14 & 0{,}92 \\ 1{,}9 & 0{,}7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Als erstes schreibt man sich die Tabellen als Matrizen auf:

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $R \times Z \to A_{RZ} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $Z \times E \to B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Weiterhin sind in der Aufgabenstellung der Produktionsvektor an Endprodukten $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ und der Preisvektor für die Rohstoffe $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$ gegeben.

Zur Berechnung des Rohstoffbedarfs wird jetzt zunächst die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix mit der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix multipliziert:

$$C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2{,}9 & 2{,}5 \\ 2{,}15 & 2{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Damit steht die Matrix, mit der wir im nächsten Schritt den Rohstoffbedarf für die Bestellung der gegeben Anzahl an Endprodukten berechnen können:

$$\vec{y} = C_{RE} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2{,}9 & 2{,}5 \\ 2{,}15 & 2{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ 39{,}4 \\ 14{,}4 \\ 13{,}2 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diesen Rohstoffbedarf mit den Preisen der einzelnen Rohstoffe, so bekommen wir die Gesamtkosten der Bestellung heraus:

$$\vec{k} = \vec{y} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 61 \\ 39{,}4 \\ 14{,}4 \\ 13{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} = 1646$$

Die Gesamtkosten für diesen Auftrag liegen bei 1646 €. Die Umsatzerlöse sollten also diese Kosten übersteigen, damit auch die fixen Kosten gedeckt werden können.

Aufgabe 4

a) $B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}35 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

b) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}35 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}365 & 0{,}1775 & 0{,}2575 & 0{,}2 \\ 0{,}225 & 0{,}235 & 0{,}2125 & 0{,}3275 \\ 0{,}22 & 0{,}325 & 0{,}25 & 0{,}205 \\ 0{,}19 & 0{,}2625 & 0{,}28 & 0{,}2675 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 03: Austauschprozesse und Gleichgewichtsverteilung

Aufgabe 1

a) $\vec{x}_3 = A^3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19{,}44 \\ 69{,}96 \\ 10{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 19 \\ 70 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 19{,}166 \\ 70{,}197 \\ 10{,}636 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 19 \\ 70 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_8 = \begin{pmatrix} 19{,}148 \\ 70{,}212 \\ 10{,}638 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 19 \\ 70 \\ 11 \end{pmatrix}$

Vom Anfangszustand zur dritten Iteration gab es noch Bewegung im System, danach nicht mehr.

b) Der Ansatz für die stabile Verteilung lautet: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Das Einsetzen der Matrix ergibt: $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Die linke Seite der Gleichung ergibt ausgerechnet:
$$\begin{aligned} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 &= x_1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}6x_3 &= x_2 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}1x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

alles auf die linke Seite „rüberbringen“:
$$\begin{aligned} -0{,}9x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 &= 0 \\ 0{,}4x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 &= 0 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Eine der Variablen durch t ersetzen: $x_3 = t$.

Daraus ergibt sich nach Einsetzen:
$$\begin{aligned} -0{,}9x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3t &= 0 \\ 0{,}4x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}6t &= 0 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}9t &= 0 \end{aligned}$$
. Jetzt ein angemessenes Verfahren

zum Lösen des LGS wählen – hier Einsetzungsverfahren:
$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 - 0{,}9t &= 0 \\ 0{,}5x_1 &= 0{,}9t \\ x_1 &= 1{,}8t \end{aligned}$$

Dieser Wert eingesetzt in die zweite Zeile
$$\begin{aligned} 0{,}4 \cdot 1{,}8t - 0{,}2x_2 + 0{,}6t &= 0 \\ -0{,}2x_2 + 1{,}32t &= 0 \\ 0{,}2x_2 &= 1{,}32t \\ x_2 &= 6{,}6t \end{aligned}$$

ergibt bereits die vollständige Lösung $L = \{1{,}8t/6{,}6t/t\}$

Für 100 und 300 Individuen ergeben sich keine ganzzahligen Lösungen, wenn man versucht, diese Anzahlen auf die Summe der Elemente des Lösungsvektors zu verteilen:

$$\begin{aligned} 100 &= 1{,}8t + 6{,}6t + t \\ 100 &= 9{,}4t \\ t &= 10{,}64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 300 &= 1{,}8t + 6{,}6t + t \\ 300 &= 9{,}4t \\ t &= 31{,}91 \end{aligned}$$

Aber bei 940 Individuen gibt es eine stabile Verteilung, denn:
$$\begin{aligned} 940 &= 1{,}8t + 6{,}6t + t \\ 940 &= 9{,}4t \\ t &= 100 \end{aligned}$$

c) Für die gegebene Matrix finden wir leicht eine Grenzmatrix:

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 0{,}1915 & 0{,}1915 & 0{,}1915 \\ 0{,}7021 & 0{,}7021 & 0{,}7021 \\ 0{,}1064 & 0{,}1064 & 0{,}1064 \end{pmatrix}$$

Langfristig werden sich also die Anteile ≈0,1915, ≈0,7021 und ≈0,1064 einstellen. Dies kann man auch nochmals mit der stabilen Verteilung überprüfen.

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}35 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_4} = A^4 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$G \approx A^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}3704 & 0{,}3704 & 0{,}3704 & 0{,}3704 \\ 0{,}321 & 0{,}321 & 0{,}321 & 0{,}321 \\ 0{,}1852 & 0{,}1852 & 0{,}1852 & 0{,}1852 \\ 0{,}1235 & 0{,}1235 & 0{,}1235 & 0{,}1235 \end{pmatrix}$$

Nein, für 40 Spieler gibt es keine ganzzahlige stabile Verteilung.

Arbeitsblatt 01: Zufallsexperimente beschreiben

Aufgabe 1

a) $S \coloneqq \{1; 2; 3; \ldots; 11\}$

b) $E_1 \coloneqq \{2; 4; 6; 8; 10\}$ $E_2 \coloneqq \{2; 3; 5; 7; 11\}$ $E_3 \coloneqq \{3; 6; 9;\}$

c) X(1) = 8; X(2) = 16; X(3) = 24 usw. X(11) = 88

Aufgabe 2

a) $S \coloneqq \{gelb, rot;\ gelb, blau;\ gelb, grün;\ rot, blau;\ rot, grün;\ blau, grün\}$

X(gelb,rot) = Pasta und Suppe; X(gelb,blau) = Pasta und Fisch; X(gelb,grün) = Pasta und Pizza; X(rot,blau) = Suppe und Fisch; X(rot,grün) = Suppe und Pizza; X(blau,grün) = Fisch und Pizza;
Insgesamt 6 Farbkombinationen, die wiederum zu 6 verschiedenen Kombinationen aus 2 von 4 möglichen Gerichten führen.

b) A:= {gelb,rot; gelb,blau; gelb,grün; rot,grün; blau,grün}

c) Nur bei der Kombination aus Suppe und Fisch wird am Wochenende nicht italienisch gegessen. B:= $\{gelb, blau;\ gelb, grün;\ blau, grün\}$

Aufgabe 3

Beliebige Beschreibung des Zufallsexperiments. Es muss nur passen, dass $X(e_i) = -15$; $X(e_i) = 5$ und $X(e_i) = 10$ für beliebige $i \in I$ (Indexmenge).
Beispielsweise könnte man sich ein Spiel vorstellen, bei dem man für bestimmte Karten, wenn man sie am Ende noch auf der Hand hält, Plus- bzw. Minuspunkte erhält.
Oder man nimmt 3 Karten: 1 Bube, 1 Dame und 1 König. Man mischt diese Karten und legt sie verdeckt auf den Tisch. Je nachdem, wann man den König aufdeckt, gibt es entweder 10 € (erste aufgedeckte Karte), 5 € (zweite aufgedeckte Karte) oder man muss 15 € abgeben (dritte aufgedeckte Karte).

Arbeitsblatt 02: Relative Häufigkeiten werden zu Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 1

Es gibt 3 grüne, 4 blaue und 5 rote Kugeln. Somit sind die Wahrscheinlichkeiten bei einer Ziehung eine bestimmte Farbe zu ziehen verschieden => Kein Laplace-Experiment.

Soll es aber beim Zufallsexperiment um die Zahlen auf den Bällen gehen, könnte man sich dafür interessieren, wie wahrscheinlich es ist, eine bestimmte Zahl zu ziehen. Oder eine gerade Zahl zu ziehen usw. => Laplace-Experiment, weil die Wahrscheinlichkeiten für alle Ergebnisse gleich sind.

Würde man ein zweites Mal ziehen, bleibt es ein Laplace Experiment, wenn die Ziehungen grundsätzlich „mit Zurücklegen“ durchgeführt werden. Wird „ohne Zurücklegen gezogen“ verändern sich die Verhältnisse innerhalb der Urne und somit auch die Einzelwahrscheinlichkeiten. Es ist dann kein Laplace Experiment mehr.

$P(A) = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$ $P(B) = \frac{4}{12} \approx 0{,}3333$ $P(C) = \frac{2}{12} \approx 0{,}1666$

$P(\bar{C}) = 1 - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} \approx 0{,}8333$

Überlegungen zu den relativen Häufigkeiten in der Urne bringen dir die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse. Dabei gilt: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Einzelergebnisse, die das Ereignis bilden.

Aufgabe 2

a) Es ergeben sich folgende mögliche Ergebnisse: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); Insgesamt sind es 25 Ergebnisse, die alle gleichwahrscheinlich auftreten können.

b) $P(E_1 \triangleq \text{verlieren}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ $P(E_2 \triangleq \text{gewinnen}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Rein anhand der Wahrscheinlichkeiten hat man bessere Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, als zu verlieren. Daher kann man aus spieltheoretischer Sicht teilnehmen. Nun kommt es natürlich auf den Einsatz an und darauf, was passiert, wenn keins der beiden Ereignisse eintritt.

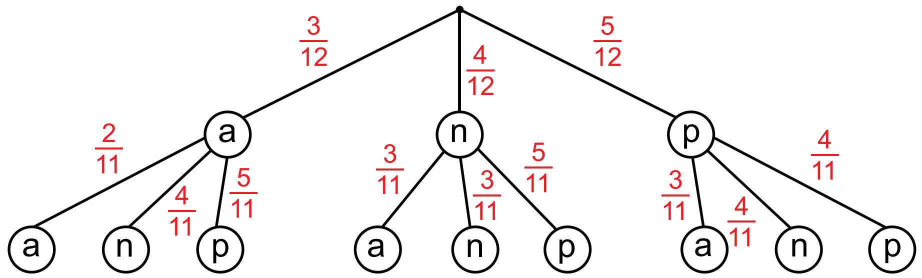
Aufgabe 3

Es ergibt sich P(E = „Kappe liegt quer auf einer Linie") = $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366 \approx 64\ \%$ und die Gegenwahrscheinlichkeit P($\bar{E}$ = „Kappe berührt keine Linie") = $1-\frac{2}{\pi} \approx 1-0{,}6366 \approx 36\ \%$.

Arbeitsblatt 03: Mehrstufige Zufallsexperimente - Pfadregeln

Aufgabe 1

a) Baumdiagramm; weil zwei Ziehungen entstehen auch zwei Ebenen



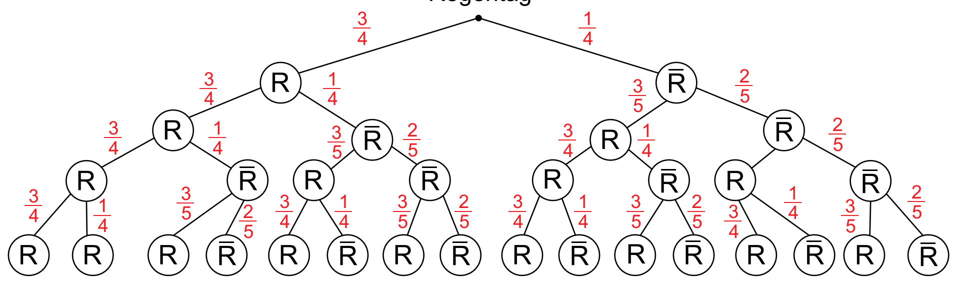
b) $P(n,p) = \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \approx 0{,}1515$ $\qquad P(p,n) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \approx 0{,}1515$

Das Ergebnis ist gleich. Schaut man sich die Brüche an, die laut 1. Pfadregel miteinander multipliziert werden, so stellt man fest, dass die Nenner gleich sind. Dies ist logisch, weil in beiden Fällen nach dem ersten Zug nur noch 11 Pralinen in der Box sind. Die ‚4' und die ‚5' im Zähler können wir aufgrund des Mal-Zeichens tauschen. Für die Wahrscheinlichkeit ist es also egal, in welcher Reihenfolge die genannten Pralinen gezogen werden. In beiden Fällen hat man eine Nuss- und eine Pistazienpraline.

c) Mit Hilfe der 1. Und 2. Pfadregel lassen sich nun auch Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse berechnen. $P(E_1) = P(n,n) + P(n,p) + P(p,n) + P(p,p) = \frac{1}{11} + \frac{5}{33} + \frac{5}{33} + \frac{5}{33} = \frac{6}{11} \approx 54{,}5\%$ $\qquad P(E_2) = P(a,p) + P(n,p) + P(p,a) + P(p,n) + P(p,p) = \frac{5}{44} + \frac{5}{33} + \frac{5}{44} + \frac{5}{33} + \frac{5}{33} = \frac{15}{22} \approx 68{,}2\%$

Aufgabe 2

Für die folgenden Teilaufgaben solltest du dir dringend das passende Baumdiagramm aufzeichnen, sonst ist es fast unmöglich fehlerfrei zu arbeiten. Nimm am besten ein Blatt im Querformat und mache dir erst einmal eine Skizze. Hier werden 4 Ebenen benötigt.



Es steht ‚R' für ‚Regentag' und ‚$\bar{R}$' für ‚nicht Regentag'. Du siehst, es startet mit einem Regentag und zweigt sich dann auf. Innerhalb einer Verzweigung ist immer nur eine Wahrscheinlichkeit aus der Aufgabe gegeben. Die andere erhältst du durch $1-\frac{3}{4}$ bzw. $1-\frac{2}{5}$. Denn die Wahrscheinlichkeiten einer Verzweigung müssen addiert immer ‚1' ergeben.

a) Heute ist Mittwoch, also ist in drei Tagen Samstag. Für die folgenden Überlegungen ist also die dritte Ebene im Baumdiagramm relevant. Insgesamt gibt es bis zur dritten Ebene acht Pfade. Bei vier Pfaden steht am Ende ein $\bar{R}$. Also erfassen wir mit der 1. Pfadregel die einzelnen dieser vier Pfade und kumulieren die Ergebnisse gemäß 2. Pfadregel.

$P(Am\ Samstag\ ist\ ein\ regenfreier\ Tag) = \frac{9}{64} + \frac{3}{40} + \frac{3}{80} + \frac{1}{25} \approx 0{,}2931 = 29{,}31\%$

b) Hier benötigen wir vier Ebenen, weil das Wetter bis Sonntag betrachtet wird. Hierzu empfiehlt es sich erstmal alle Ergebnispfade zu notieren, die das Ereignis erfüllen:

$(R,\bar{R},\bar{R},\bar{R})$; $(\bar{R},R,\bar{R},\bar{R})$; $(\bar{R},\bar{R},R,\bar{R})$; $(\bar{R},\bar{R},\bar{R},R)$; $(\bar{R},\bar{R},\bar{R},\bar{R})$

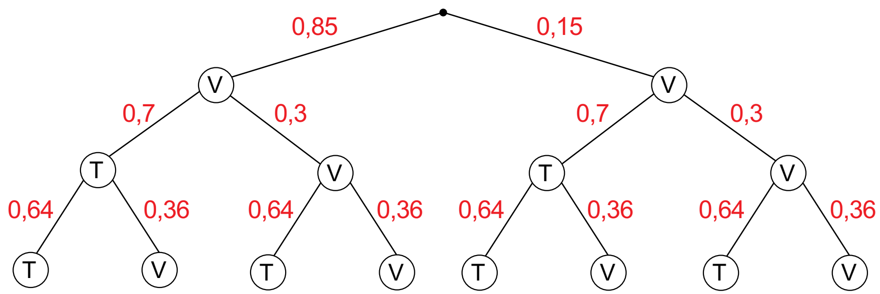
Der Regentag kann also quasi auf einen beliebigen Tag permutiert werden. Ergänzt wird die Reihe durch das Ergebnis, dass es keinen Regentag gibt.

$P(höchstens\ einmal\ Regen\ bis\ Sonntag) = \frac{3}{100} + \frac{3}{200} + \frac{3}{200} + \frac{3}{125} + \frac{2}{125} \approx 0{,}1 = 10\%$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit weder größer noch kleiner als 10%, sondern exakt 10%, dass es bis Sonntag nur noch höchstens einmal regnet.

Aufgabe 3

Wie immer starten wir mit dem passenden Baumdiagramm zu der Aufgabe, wobei ‚T' für ‚Treffer' und ‚V' für ‚Verschossen' stehen soll:



Hier ergibt sich als einziger Pfad an dem das Ereignis nicht erfüllt ist die Kette (V,V,V). Nun hätte man die Möglichkeit, anstatt aller Ereignispfade, einfach 1-P(V,V,V) zu berechnen.

$1 - P(V,V,V) = 1 - (0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}36) = 1 - 0{,}0162 = 0{,}9838 = 98{,}38\%$

Es ist also sehr wahrscheinlich, dass mindestens einer trifft.

Arbeitsblatt 04: Vierfeldertafel

Aufgabe 1

a) In der Tabelle siehst du die ergänzten Werte fettgedruckt. Rot = 38 Schüler finden das Schulsystem akzeptabel; grün = 100 befragte Personen finden das Schulsystem nicht akzeptabel; gelb = 114 Schüler wurden befragt; blau = 150 Personen wurden insgesamt befragt.

	A	$\bar{A}$	Summe
S	38	**76**	**114**
L	**12**	24	**36**
Summe	50	**100**	**150**

b) Wie viele Personen sind Schüler/innen **und** finden das Schulsystem ‚nicht akzeptabel'? Ant.: 76 . Hier geht es um die sogenannte Schnittmenge $S \cap \bar{A} = 76$.
Wie viele Personen sind Lehrkräfte **oder** finden das Schulsystem akzeptabel? Ant.: 36 Lehrkräfte plus 38 Schüler, die das Schulsystem akzeptabel finden, aber keine Lehrer sind. Hier geht es um die sogenannte Vereinigungsmenge $L \cup \bar{A} = 74$.

c) $P(\bar{E}_2) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$; $P(E_1 \cap E_2) = \frac{24}{150} = 0{,}16$; $P(E_1 \cup E_2) = \frac{36+76}{150} \approx 0{,}7466$

Aufgabe 2

a)

	F	$\bar{F}$	Summe
M	3.185	33.215	36.400
W	1.365	27.235	28.600
Summe	4.550	60.450	**65.000**

	F	$\bar{F}$	Summe
M	0,049	0,511	0,56
W	0,021	0,419	0,44
Summe	0,07	0,93	**1**

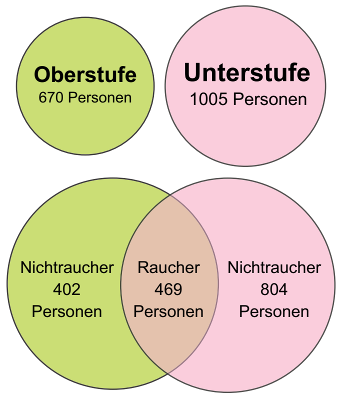
b) $P(M \cap \bar{F}) = 0{,}511$

c) $P(W \cup F) = 0{,}44 + 0{,}049 = 0{,}489$

Tiefergehende Erklärungen zur Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge findest du im Video.

Aufgabe 3

O = Oberstufe; U = Unterstufe; R = rauchen



	R	$\bar{R}$	Summe
O	268	402	670
U	201	804	1005
Summe	469	1206	**1675**

Das Venn-Diagramm weist die Gruppe an Rauchern aus der Oberstufe und Unterstufe nicht separat aus.

Arbeitsblatt 05: Urnenmodelle

Aufgabe 1

Beim Kartenspielen ist die Reihenfolge der Karten auf der Hand normalerweise egal. Außerdem kann ein Element nicht doppelt auftreten. Also Modell 4: o.Z./o.R. mit n = 32 und k = 3. Anzahl Kombinationen $= \binom{n}{k} = \binom{32}{3} = \frac{32!}{3! \cdot (32-3)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.960$

Für Ereignis E = „Einen Drilling ausgeteilt bekommen" gilt

E = {(7,7,7); (8,8,8); (9,9,9); (10,10,10); (B,B,B); (D,D,D); (K,K,K); (A,A,A)} . Die Anzahl der Ergebnisse, die in E enthalten sind, ist 8. Somit können wir über die Formel für Laplace-Wahrscheinlichkeiten die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

$P(E) = \frac{8}{4960} \approx 0{,}001613 = 0{,}1613\%$. Also besteht eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, einen Drilling ausgeteilt zu bekommen.

Aufgabe 2

a) Modell 2: o.Z. / m.R. mit n = 7 und k = 3

\# Variationen = $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 210$

$P(Ein\ Familienmitglied\ der\ Francks\ gewinnt) = \frac{10}{210} \approx 0{,}0476 = 4{,}76\%$

b) Modell 4: o.Z. /o.R.

\# Kombinationen = $\binom{n}{k} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = 35$

$P(Ein\ Familienmitglied\ der\ Francks\ gewinnt) = \frac{10}{35} \approx 0{,}2857 = 28{,}57\%$

Die Chancen würden sich also erheblich verbessern, weil es insgesamt weniger mögliche Zieleinläufe gibt.

c) http://lotto-generator.de/lotto-langzeit-simulation/
https://www.mathematik.ch/spiele/swisslotto/

\# Kombinationen = $\binom{n}{k} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\cdot(49-6)!} = 13.983.816$

Die Wahrscheinlichkeit im Lotto zu gewinnen ist also fast Null, da es knapp 14 Mio. Kombinationen gibt. Trotzdem denkt man sich, dass das doch nicht so schwer sein kann, die richtigen Zahlen zu tippen. Zumal ja auch ohne Reihenfolge gezogen wird.

Aufgabe 3

Für jedes der drei Rädchen gibt es vier mögliche Zahlen, also 4 · 4 · 4 = 64 Variationen. Es liegt demnach das Urnenmodell 1 zugrunde, da sich der Code mit Zurücklegen und relevanter Reihenfolge ergibt. Ein Dieb müsste nur höchstens 64 Variationen ausprobieren, um das Schloss zu knacken. Fügt der Hersteller ein Rädchen hinzu, wären es bereits 256 Variationen. Wird zusätzlich noch eine weitere Zahl auf jedes Rädchen gedruckt (also 5 Elemente und 4 Ziehungen), dann ergeben sich 625 Variationen. Das Schloss wäre dann also wesentlich sicherer.

Aufgabe 4

Urnenmodell 3:
Folgende Ergebnisse (hier Kombinationen) erfüllen das Ereignis E = „Mindestens drei gleiche Augenzahlen“:

(1,1,1,1); (2,2,2,2); (3,3,3,3); (4,4,4,4); (5,5,5,5); (6,6,6,6);
(1,1,1,2); (1,1,1,3); (1,1,1,4); (1,1,1,5); (1,1,1,6); (2,2,2,1); (2,2,2,3); (2,2,2,4); (2,2,2,5); (2,2,2,6); (3,3,3,1); (3,3,3,2); (3,3,3,4); (3,3,3,5); (3,3,3,6); (4,4,4,1); (4,4,4,2); (4,4,4,3); (4,4,4,5); (4,4,4,6); (5,5,5,1); (5,5,5,2); (5,5,5,3); (5,5,5,4); (5,5,5,6); (6,6,6,1); (6,6,6,2); (6,6,6,3); (6,6,6,4); (6,6,6,5);

|E| = Anzahl (E) = 36

Anzahl Kombinationen gesamt = $|\Omega| = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{6+4-1}{6-1} = \binom{9}{5} = 126$

$P(E) = \frac{36}{126} \approx 0{,}2857 = 28{,}57\%$

Arbeitsblatt 06: Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung

Aufgabe 1

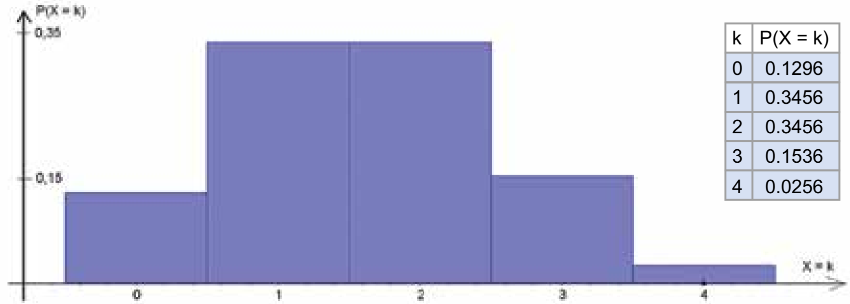
a) X ~ binom $(10, \frac{1}{7})$ mit $k \in \{0,1,2,3,\ldots,10\}$

b) X ~ binom (6, 0.012) mit $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

c) X ~ binom (4, 0.2) mit $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Aufgabe 2

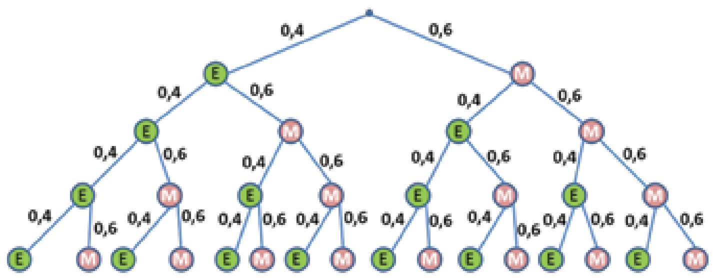
X ~ binom(4, 0.4)



k	P(X = k)
0	0.1296
1	0.3456
2	0.3456
3	0.1536
4	0.0256

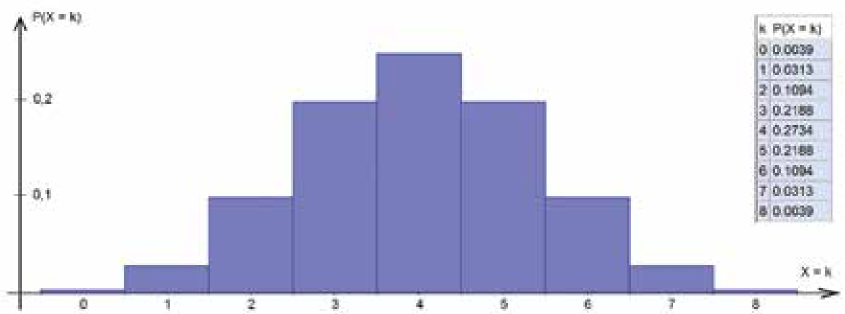
X = k	0	1	2	3	4	Σ
P(X = k)	$1\cdot0{,}4^0\cdot0{,}6^4 = 0{,}1296$	$4\cdot0{,}4^1\cdot0{,}6^3 = 0{,}3456$	$6\cdot0{,}4^2\cdot0{,}6^2 = 0{,}3456$	$4\cdot0{,}4^3\cdot0{,}6^1 = 0{,}1536$	$1\cdot0{,}4^4\cdot0{,}6^0 = 0{,}0256$	1

$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot\pi^k\cdot(1-\pi)^{n-k}$ z.B. $P(X=3) = \binom{4}{3}\cdot0.4^3\cdot(1-0.4)^1 = 0{,}1536$

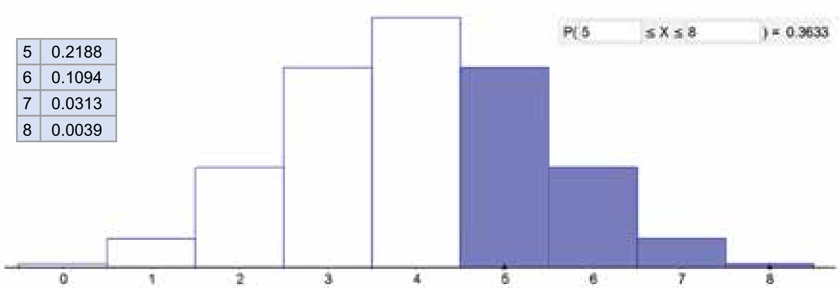


Aufgabe 3

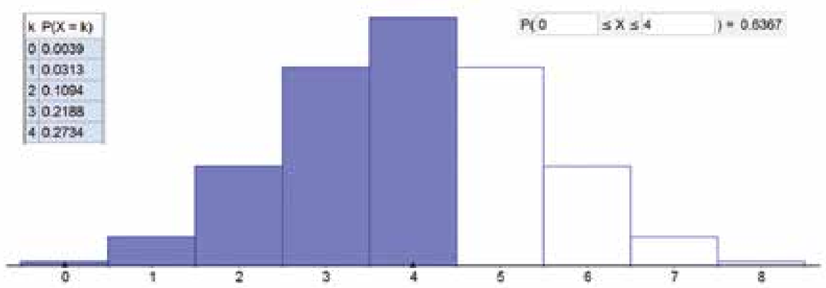
n = 8 und π = 0.5 somit gilt X ~ binom(8, 0.5)



P(du gewinnst) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) = 0,3633



P(du verlierst) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,6367

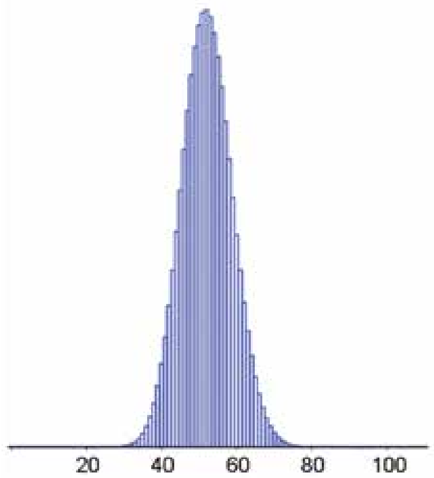


Arbeitsblatt 07: Binomialverteilung – Taschenrechner und Grafiken

Aufgabe 1

X ~ binom(n = 365; $\pi = \frac{1}{7}$)

Man kann sehr gut erkennen, dass die Wahrscheinlichkeiten für k < 30 sowie k > 75 verschwindend gering sind. Daher spielen Sie bei Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen dieses Experiments fast keine Rolle. Man kann festhalten: P(X < 30) ≈ 0 und P(X > 75) ≈ 0 .



k	P(X = k)
30	0.0001
31	0.0002
32	0.0004
33	0.0007
34	0.0012
35	0.0018
36	0.0028
37	0.0042
38	0.006
39	0.0084
40	0.0113
41	0.015
42	0.0193
43	0.0241
44	0.0294
45	0.035

k	P(X = k)
46	0.0406
47	0.0459
48	0.0507
49	0.0546
50	0.0576
51	0.0593
52	0.0596
53	0.0587
54	0.0565
55	0.0533
56	0.0491
57	0.0444
58	0.0393
59	0.0341
60	0.029

k	P(X = k)
61	0.0241
62	0.0197
63	0.0158
64	0.0124
65	0.0096
66	0.0073
67	0.0054
68	0.004
69	0.0028
70	0.002
71	0.0014
72	0.0009
73	0.0006
74	0.0004
75	0.0003

a) P(X = 50) = 0,0576 Wir können die Wahrscheinlichkeit in der GeoGebra Tabelle ablesen, sie mit dem GTR (binompdf(365,1/7,50) ermitteln oder sie über die Formel von Bernoulli $P(X=50)=\binom{365}{50}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{50}\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)^{365-50}=0{,}0576$ berechnen.

b) P(X ≤ 41) = 0,0523 Es heißt ja, an „weniger als 42 Tagen". Daraus ergibt sich das Intervall [0; 42) bzw. [0; 41] weil X eine diskrete Zufallsvariable ist.
Mit der GeoGebra Tabelle wird es sehr mühsam, die Einzelwahrscheinlichkeiten für k = 0, 1, 2, 3, 4, … ,41 zu kumulieren (aufzusummieren). Daher empfiehlt sich der Einsatz des Taschenrechners: binomcdf(365,1/7,41) = 0,0523

c) „Mehr als 42 Tage". Hierbei sollte man mit der Gegenwahrscheinlichkeit arbeiten. Mehr als 42 Tage bedeutet als Intervall [43; 365]. Dieses Intervall enthält die Werte für X, die das Ereignis erfüllen. Das Intervall [0; 42] enthält alle Werte, die das Ereignis nicht erfüllen. Daher rechne ich einfach 1 – F(42) bzw. 1 – binomcdf(365,1/7,42). Denn so rechnen man aus der Gesamtwahrscheinlichkeit ‚1' alle Einzelwahrscheinlichkeiten der Werte heraus, die das Ereignis nicht erfüllen.

$$P(X\geq 43)=1-P(X\leq 42)=1-binomcdf\left(365,\frac{1}{7},42\right)=0{,}9284$$

d) $P(45\leq X\leq 60)=P(X\leq 60)-P(X\leq 44)=binomcdf(60)-binomcdf(44)$

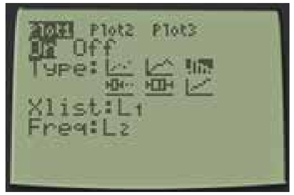
F(60) – F(44) = 0,7676

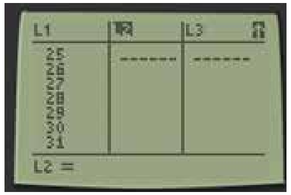
Ein Histogramm können wir auch mit dem GTR oder mit dem CAS zeichnen. Hier die Schritte für den GTR: 2nd – Stat Plot – On – Type: ‚Histogram' – L1 und L2

Dann gehst du auf Stat – Edit und füllst die Listen aus: Oben auf L1 gehen – Enter – 2nd list – OPS – seq – ausfüllen, wie auf Bild 3 - Enter - Enter

Dann gehst du auf L2 wie im Bild 4. 2nd – DISTR – Binompdf – Einstellungen wie in Bild 5 – paste - Enter

Nun noch die Window-Einstellungen so wählen, dass sie zu den Listen L1 und L2 passen (siehe Bild 6).



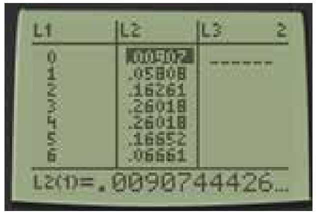


Aufgabe 2

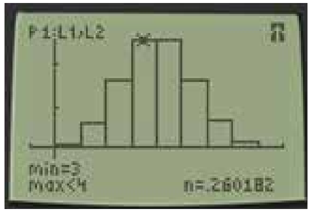
X ~ binom(n = 8 ; π = $\frac{4}{9}$)

Du gehst beim GTR in den Bereich „Stat – Edit". Dort füllst du die Liste L1 mit den möglichen Ergebnissen (k) aus. k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

In L2 führst du den Befehl „binompdf(8, 4/9, L1)" aus. Bitte schaue dir das Video an, weil man es hier nur sehr rudimentär erklären kann.



Nun kann man die Listen L1 und L2 (unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung) auch grafisch sichtbar machen. Hierzu nimmst du die Einstellungen vor, wie ich sie oben für die erste Aufgabe erklärt habe. Auch hier empfiehlt es sich, das Video zu schauen.



Mit 2nd – trace kannst du auch die einzelnen ‚Säulen' des Histogramms anwählen. Versuch doch mal das Histogramm auf ein Blatt zu übertragen. Die Tabelle und die Ausgabe des GTRs helfen dir.

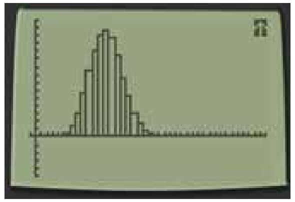
$P(X < 6) = P(X \leq 5) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0{,}9166$

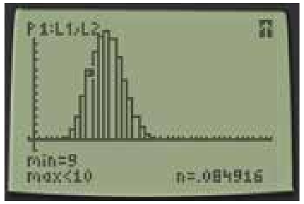
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}2298 = 0{,}7702$

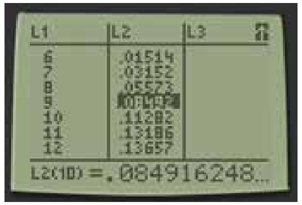
$P(2 \leq X < 5) = P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}683$

Aufgabe 3

Auch hier empfehle ich dir, das Video zu schauen, weil man einige Einstellungen vornehmen muss, damit die Anzeige eines Histogramms klappt.







$B_{40;\,0,3}(12) = P(12) = 0{,}1366$ Wahrscheinlichkeitsfunktion an der Stelle X = 12

$F_{40;\,0,3}(12) = P(X \leq 12) = 0{,}5772$ Verteilungsfunktion an der Stelle X = 12

Klasse 12,2 - Oberthema D

Stochastik 2

Arbeitsblatt 01: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 1

Ω = {(K,K,K), (K,K,Z), (K,Z,K), (Z,K,K), (K,Z,Z), (Z,K,Z), (Z,Z,K), (Z,Z,Z)}

a) A = Beim ersten Wurf liegt Kopf oben. B = Es liegt dreimal Kopf oben.

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{8}$; $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{1}{4}}$ $P(A \cap B) = P(B \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Hier gilt offensichtlich P(B) ≠ P_A (B). Somit sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander.

$$\boldsymbol{P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 1}$$

b) A = Es liegt exakt einmal Kopf oben. B = Beim ersten Wurf liegt Zahl oben.

$P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{2}{3}}$ $P(A \cap B) = P(B \cap A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

Hier ergibt sich P(B) ≠ P_A (B). Die Ereignisse A und B sind also nicht unabhängig voneinander und die Zusatzinformation A verändert die Wahrscheinlichkeit für B.

$$\boldsymbol{P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}}$$

Aufgabe 2

A = „Umschlag mit gerader Zahl.“ = [2, 4, 6] also $P(A) = \frac{3}{7}$

B = „Keinen blauen Umschlag.“ = [1, 2, 5, 6, 7] also $P(B) = \frac{5}{7}$

$P_A(B) = \frac{2}{3}$ … denn wenn er keinen Umschlag mit einer geraden Zahl wählt, bleiben nur noch die Umschläge 2, 4 und 6 übrig. Umschlag 4 ist aber blau, sodass nur noch 2 von 3 Elementen das Ereignis B erfüllen, wenn A eingetreten ist.

Aufgabe 3

$P(B) = P_A(B)$ (wegen Unabhängigkeit)

$\Leftrightarrow P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$ (Totale Wahrscheinlichkeit von B)

$\Leftrightarrow P(B) = P(A) \cdot P(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

$\Leftrightarrow P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

$\Leftrightarrow P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

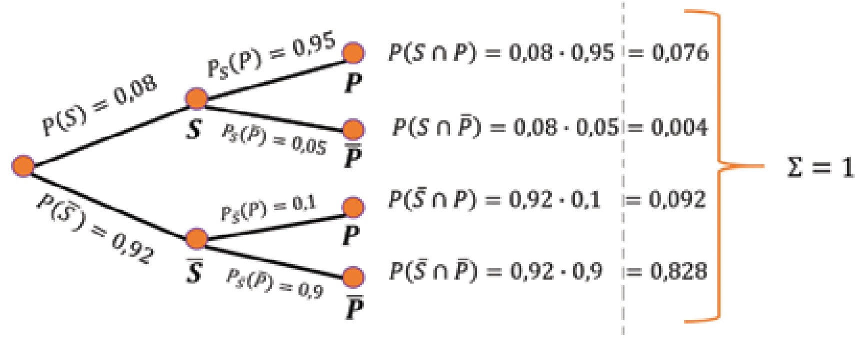
$\Leftrightarrow P(B) \cdot P(\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

$\Leftrightarrow P(B) = P_{\bar{A}}(B)$ q.e.d.

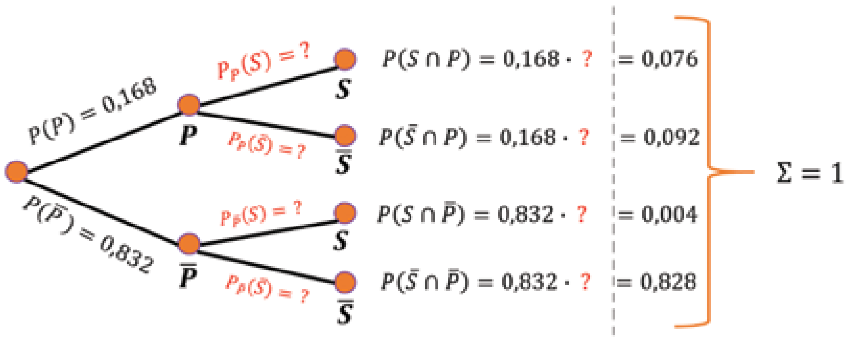
Arbeitsblatt 02: Satz von Bayes

Aufgabe 1

Hier siehst du die a priori Wahrscheinlichkeiten, die wir aus den gegebenen Informationen nun in einem Baumdiagramm sichtbar machen. Die Bezeichnungen sind S = schwanger; P = positiv (schwanger getestet).



Die Aufgabenstellung lautet: Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass eine als ‚nicht schwanger‘ getestete Frau auch wirklich nicht schwanger ist. Dies können wir hier nicht ablesen und daher müssen wir das Baumdiagramm invertieren. Hierfür benötigt man die totale Wahrscheinlichkeit für P, also P(P). P(P) = P (S ∩ P) + P($\bar{S}$ ∩ P) = 0,168 . Das heißt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Frau als schwanger getestet wird, beträgt 16,8%.



Im invertierten Baumdiagramm finden wir eine Lösung für die Fragestellung. Gegeben ist die Information, dass es sich um eine als ‚nicht schwanger' getestete Frau ($\bar{P}$) handelt. Die Frage ist, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese Person auch wirklich nicht schwanger ($\bar{S}$) ist. Also:

$$P_{\bar{P}}(\bar{S}) = P(\bar{S}|\bar{P}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{0{,}828}{0{,}832} = 0{,}9952 = \mathbf{99{,}52\%}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine als nicht schwanger getestete Frau auch wirklich nicht schwanger ist, beträgt 99,52%. Man kann sich also dann recht sicher sein.

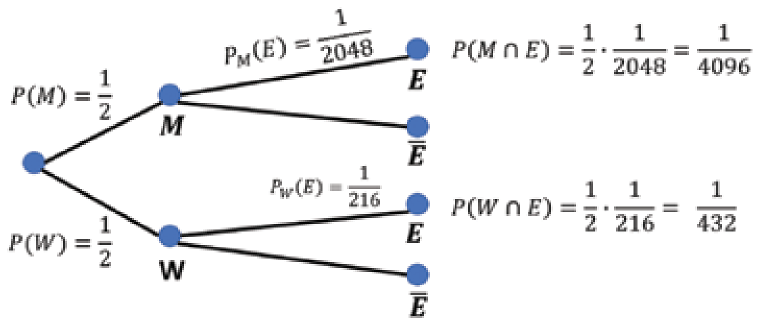
Aufgabe 2

A priori gehen wir davon aus, dass die Auswahl des Verfahrens zufällig geschieht, also P(M) = 0,5 und P(W) = 0,5. Die Zahlen auf dem Zettel sehen wir als Ereignis E = „2 – 5 – 4" an.

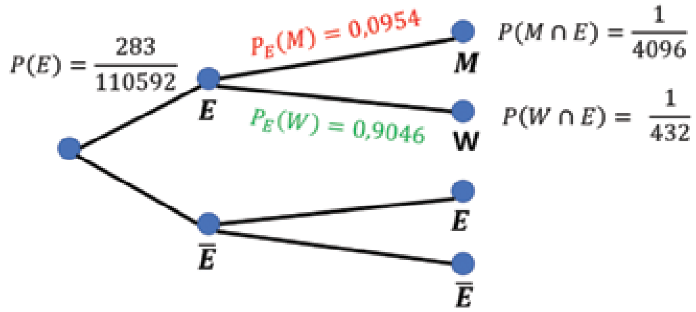
Wenn man sich für den Münzwurf entschieden hat, ergibt sich $P_M(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2048}$.

Wenn man sich für den Würfel entschieden hat, ergibt sich $P_W(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Dadurch ergibt sich a priori das folgende Baumdiagramm:



Es interessieren uns hier nur die Pfade, die bei E enden, da es ja nicht darum geht, dass das Ereignis „2 – 5 – 4" nicht erreicht wurde. Aus diesen Informationen können wir nun die totale Wahrscheinlichkeit P(E) berechnen: $P(E) = P(M \cap E) + P(W \cap E) = \frac{283}{110592}$. Hieraus wiederum lässt sich das a posteriori Baumdiagramm erzeugen und somit der Sachverhalt klären.



Dieser Zettel ist also ziemlich wahrscheinlich beim Würfeln entstanden.

Aufgabe 3

Zeichne dir ein Baumdiagramm zu den gegebenen Informationen. Die totale Wahrscheinlichkeit, dafür dass er pünktlich ist beträgt P(P) = 0,72 . Außerdem lässt sich P(B ∩ P) = 0,64 ermitteln.

Somit ist $P_P(B) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)} = 0{,}\bar{8} \approx 88{,}88\%$.

Hier könnte man sich natürlich noch viele weitere Aspekte anschauen. Hier ist aber nur nach dem einfachsten Fall gefragt, daher ist auch nicht mehr notwendig.

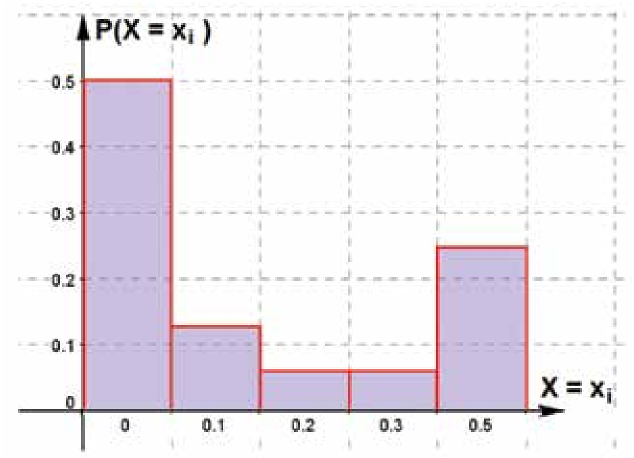
Arbeitsblatt 03: Erwartungswert einer Zufallsgröße

Aufgabe 1

Zuerst stellen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X auf. Da es sich weder um ein Laplace Experiment (Wahrscheinlichkeiten für x_i sind verschieden), noch um ein Bernoulli-Experiment handelt, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von den Pfadregel-Überlegungen ermitteln.

$X = x_i$	0 €	0,10 €	0,20 €	0,30 €	0,50 €	Σ
$P(x_i)$	$8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{16}{16} = 1$

Diese Informationen stellen wir nun in einem Histogramm dar:



$$E(X) = \mu = 0\,€ \cdot \frac{1}{2} + 0{,}10\,€ \cdot \frac{1}{8} + 0{,}20\,€ \cdot \frac{1}{16} + 0{,}30\,€ \cdot \frac{1}{16} + 0{,}50\,€ \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{160} \approx 0{,}17\,€$$

Erwartungswert nach 100 Spielen = $100 \cdot \frac{27}{160} \approx 16{,}88\,€$.

Der Anbieter sollte einen Preis pro Spiel festlegen, der größer ist, als der Erwartungswert, denn dann verdient er mit dem Gerät Geld. Hier wären auf jeden Fall 20 Cent pro Spiel denkbar. Wahrscheinlich eher 30 Cent.

Aufgabe 2

$$E(X) = \mu = 0\,€ \cdot \frac{10}{20} + 1\,€ \cdot \frac{6}{20} + 2\,€ \cdot \frac{4}{20} = \frac{7}{10}\,€ = 0{,}70\,€$$

Der Erwartungswert für die Auszahlung ist höher als der Spieleinsatz, daher ist es aus mathematisch-wirtschaftlicher Sicht ratsam teilzunehmen. Die langfristige Auszahlung wird zu einem positiven Gewinn führen (Gesetz der großen Zahlen).

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X = „Anzahl an roten Bällen bei acht Ziehungen" = {0, 1, 2, 3, … , 15}.

Dabei ist $X \sim binom(n = 15; \pi = \frac{4000}{10000} = 0{,}4)$. $E(X) = n \cdot \pi = 15 \cdot 0{,}4 = 6$

Man kann erwarten, dass du sechsmal einen roten Ball in der Hand hältst. Es kann natürlich völlig anders kommen, aber statistisch gesehen, ist diese Ausprägung von X zu erwarten.

Aufgabe 4

Hier muss man für alle möglichen Verkaufsmengen den Erwartungswert des Gewinns berechnen.

15 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 15$	0,05	0,75
11	$11 \cdot 5 - 4 \cdot 7 = 27$	0,15	4,05
12	$12 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 39$	0,30	11,70
13	$13 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 51$	0,25	12,75
14	$14 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 63$	0,15	9,45
15	$15 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 75$	0,1	7,5
Summe Nettogewinn beim Angebot von 15 Sträußen in €:			**46,20 €**

14 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 4 \cdot 7 = 22$	0,05	1,10
11	$11 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 34$	0,15	5,10
12	$12 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 46$	0,30	13,80
13	$13 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 58$	0,25	14,50
14	$14 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 70$	0,15+0,1 = 0,25	17,50
Summe Nettogewinn beim Angebot von 14 Sträußen in €:			**52,00 €**

13 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 29$	0,05	1,45
11	$11 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 41$	0,15	6,15
12	$12 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 53$	0,30	15,90
13	$13 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 65$	0,25+0,25 = 0,5	32,50
Summe Nettogewinn beim Angebot von 13 Sträußen in €:			**56,00 €**

12 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 36$	0,05	1,80
11	$11 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 48$	0,15	7,20
12	$12 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 60$	0,80	48,00
Summe Nettogewinn beim Angebot von 12 Sträußen in €:			**57,00 €**

11 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 43$	0,05	2,15
11	$11 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 55$	0,95	52,25
Summe Nettogewinn beim Angebot von 11 Sträußen in €:			**54,40 €**

10 Sträuße:

Anzahl verkaufter Sträuße	Gewinn in €	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert in €
10	$10 \cdot 5 - 0 \cdot 7 = 50$	1	50,00
Summe Nettogewinn beim Angebot von 10 Sträußen in €:			**50,00 €**

Das kleine Blumengeschäft sollte täglich 12 Sträuße zum Verkauf anbieten, um den Nettogewinn zu maximieren. Dieser Beträgt dann 57 €.

Arbeitsblatt 04: Varianz und Sigmaregeln

Aufgabe 1

$$\bar{x} = \frac{81+76+85+85+84+91+77+90+89+71}{10} = 82{,}9$$

$\sigma = 6{,}2522$ $\sigma^2 = 39{,}09$

Aufgabe 2

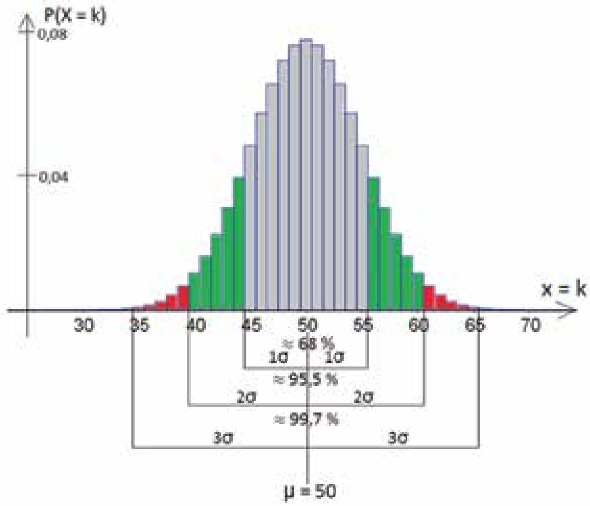
$E(X) = \mu = n \cdot \pi = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ $Var(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 25$ $\sigma = 5$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) = P(45 \le X \le 55) \approx 0{,}68$ (exakt 0,7287)

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(40 \le X \le 60) \approx 0{,}955$ (exakt 0,9648)

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(35 \le X \le 65) \approx 0{,}997$ (exakt 0,9982)

Bei binomialverteilten Zufallsvariablen lassen sich der Erwartungswert und die Varianz leicht mit den obigen Formeln berechnen. Die Sigma-Regeln lassen sich einsetzen, um schnell einen Eindruck von der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bekommen. Man kann ohne zu rechnen direkt sagen, dass zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ ungefähr 68 % Wahrscheinlichkeit liegt.



Aufgabe 3

$n = 180$ $\pi = 0{,}9$ $\mu = 162$ $\sigma^2 = 16{,}2$ $\sigma = 4{,}025$

a) $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) = P(156 \le X \le 168) \approx 0{,}90$ (exakt 0,8956)

b) $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) = P(155 \le X \le 169) \approx 0{,}95$ (exakt 0,9393)

c) $P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) = P(152 \le X \le 172) \approx 0{,}99$ (exakt 0,991)

d) Hier müssen wir rekursiv vorgehen und eine Gleichung aufstellen. Maßgeblich ist der obere bzw. rechte Intervallswert. Wir suchen also ein 95 % Vertrauensintervall $[k_1 \le X \le k_2]$, sodass k_2 nicht größer ist, als 180 (Personen).

$\mu + 1{,}96\sigma \le k_2$ $n \cdot \pi + 1{,}96 \cdot (\sqrt{n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}) \le k_2$

$n \cdot 0{,}9 + 1{,}96 \cdot (\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} \le 180$ Die Frage ist also, wie viele Tickets (n) RainAir verkaufen kann, um mit einem Vertrauen von 95 % nicht zu viele Fluggäste am Gate zu haben.

$n \cdot 0{,}9 + 1{,}96 \cdot (\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}) \le 180$ $n \cdot 0{,}9 + 1{,}96 \cdot (\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}) - 180 \le 0$

Das ist jetzt quasi eine Nullstellengleichung, die wir so als Funktion in den GTR eingeben. Nun muss man nur noch die Nullstelle finden. Diese ist das n, welches die Gleichung löst.

n ≈ 191

Somit: $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) = P(164 \le X \le 180) \approx 0{,}95$ (exakt 0,9606)

Die Fluggesellschaft kann also mit einem Vertrauen von 95 % 191 Tickets verkaufen. Das sind 11 Tickets mehr als Plätze und somit zusätzliche Einnahmen. Wissen über Statistik und Wahrscheinlichkeiten bringt also bares Geld.

Aufgabe 4

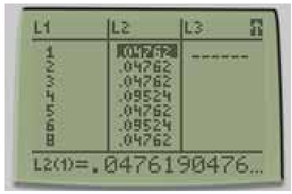
Ziehung mit Zurücklegen ohne Reihenfolge. Die Kombinationen sind:

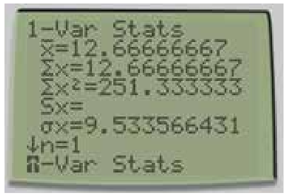
(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,4); (4,5); (4,6); (5,5); (5,6); (6,6);

\# Kombinationen = $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{6+2-1}{6-1} = \binom{7}{5} = 21$

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$





E(X) = $12\frac{2}{3}$ Var(X) = $90,\bar{8}$ $\sigma \approx 9{,}53$

Die Zahlen drücken eine hohe Streuung um den Erwartungswert aus und wenn man sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung anschaut, ist dies auch logisch.

Arbeitsblatt 05: Hypothesentest mit $\pi = \pi_0$ (zweiseitig)

Aufgabe 1

H_0: Die Medikamente A und B sind gleich gut.

Fehler 1. Art, bzw. α - Fehler: Du handelst nicht nach der Behauptung, obwohl sie stimmt.

Fehler 2. Art, bzw. β - Fehler: Du handelst nach der Behauptung, weil du ihr vertraust. Dabei stimmt sie nicht.

Aufgabe 2

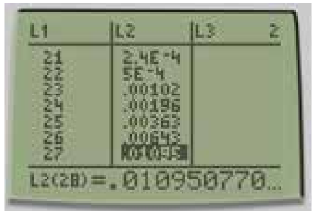
H_0: $\pi = 0{,}2$ (wobei $\pi_0 = 0{,}2$ ist, also der vermutete Anteilswert; hier an Unterrichtsausfällen)

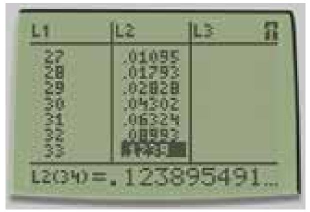
H_1: $\pi \neq 0{,}2$

PG = 30 170 von 200 Unterrichtsstunden wurden erteilt. Somit 30 ausgefallene Stunden.

Der Erwartungswert μ = n · π = 40, daher ist bei diesem zweiseitigen Hypothesentest der linke Ablehnungsbereich für H_0 interessant.

Verteilungsfunktion mit GTR/CAS erzeugen. L1: seq(X,X,0,200,1) und L2: binomcdf(200,0.2,L1).





Hier siehst du jetzt die kumulierten Wahrscheinlichkeiten, also in L2 sind jeweils P(X ≤ k) aufgelistet (Verteilungsfunktion).

Obwohl es sich um einen zweiseitigen Test handelt, benötigen wir eigentlich nur den Ablehungsbereich auf der linken Seite, weil die PG wenn dann, nur dort hineinfällt und nicht in den Ablehnungsbereich auf der rechten Seite von μ.

α = 0,1:

Führt zu einem Ablehnungsbereich auf der linken Seite von $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$. Mein k_1 muss also so gewählt werden, dass 0,05 gerade so nicht überschritten wird. Man sieht in der Tabelle, dass dies bei k = 30 der Fall ist, da P(k ≤ 30) = 0,04302 und P(k ≤ 31) = 0,06324. **A_1 = [0; k_1] = [0; 30].**

Hier fällt die PG in den Ablehnungsbereich von H_0. Somit lässt sich die H_0 auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ verwerfen und die H_1 als statistisch sicher annehmen. Bedeutet also, dass die Schule keine Unterrichtsausfallquote von 20 % aufweist, sondern vermutlich besser ist als ihr Ruf. Bei dieser Entscheidung begehen wir zu ca. 0,1 einen alpha-Fehler. Ein α-Fehler wird immer dann begangen, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie stimmt.

α = 0,05:

Führt zu einem Ablehnungsbereich auf der linken Seite von $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$. Mein k_1 muss also so gewählt werden, dass 0,025 gerade so nicht überschritten wird. Man sieht in der Tabelle, dass dies bei k = 28 der Fall ist, da $P(k \leq 28) = 0{,}01793$ und $P(k \leq 29) = 0{,}02828$. **$A_1 = [0; k_1] = [0; 28]$.**

Hier fällt die PG nicht in den Ablehnungsbereich von H_0, sondern in den Annahmebereich von H_0. Somit müssen wir davon ausgehen, dass H_0 tauglich ist, wir können es aber nicht statistisch sicher sagen. Den Fehler, den wir bei dieser Entscheidung begehen können, nennt man beta-Fehler oder Fehler 2. Art. Dieser lässt sich nicht so einfach einschätzen. Man begeht einen β-Fehler immer dann, wenn man eine Nullhypothese annimmt, obwohl sie eigentlich nicht stimmt.

α = 0,01:

Dieses Signifikanzniveau muss nicht geprüft werden, da die PG sicher in den Annahmebereich A_0 der Nullhypothese fallen wird. Dies ist logisch, weil der Ablehnungsbereich der H_0 bei einem kleineren Signifikanzniveau auch noch kleiner wird, als im Fall zuvor. Die Grenze k_1 entfernt sich also vom Mittelwert μ.

Der p-Wert (engl. p-value) muss also zwischen 0,1 und 0,05 liegen. Wir können exakt mit folgender Überlegung bestimmen: Der p-Wert entspricht dem Signifikanzniveau α, bei dem die PG geradeso noch in den Ablehnungsbereich fällt. Also mit anderen Worten benötigt man $P(X \leq 30) = 0{,}04302$. Über diese Wahrscheinlichkeit verfügt der Ablehnungsbereich linksseitig.

Somit also $\frac{\alpha}{2} = 0{,}04302 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}086 =$ p-Wert. Für jedes $\alpha \geq 0{,}086$ fällt die PG in den Ablehnungsbereich. Die H_0 kann also mit einem Fehler von 8,6 % und mit einer Sicherheit von 91,4% verworfen werden.

Aufgabe 3

a) $\pi_0 = 0{,}9$ n = 200 $\alpha = 0{,}01$ PG = 173

Achte darauf, dass α auf zwei Seiten aufgeteilt werden muss: $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$.

$A_0 = [168; 190]$ PG fällt in Annahmebereich von H_0. Wir müssen davon ausgehen, dass die Nullhypothese tauglich ist, auf einem SN von $\alpha = 0{,}01$.

p-value = $P(X \leq 173) \cdot 2 = 0{,}0672 \cdot 2 = 0{,}1344$

Man müsste also ein SN $\alpha \geq 0{,}1344$ wählen, um H_0 zu verwerfen.

b) $\pi_0 = \frac{2}{3}$ n = 100 $\alpha = 0{,}05$ PG = 77

Achte darauf, dass α auf zwei Seiten aufgeteilt werden muss: $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$.

$A_0 = [57; 76]$ PG fällt in Ablehnungsbereich von H_0. Wir können H_0 verwerfen und H_1 als statistisch sicher annehmen, auf einem SN von $\alpha = 0{,}05$.

p-value = $(1 - P(X \leq 76)) \cdot 2 = (1 - 0{,}9836) \cdot 2 = 0{,}0328$

Man müsste also nur ein SN $\alpha \geq 0{,}0328$ wählen, um H_0 zu verwerfen. Dies entspricht dann genau dem alpha-Fehler den wir dabei eingehen.

c) $\pi_0 = 0{,}5$ n = 50 $\alpha = 0{,}01$ PG = 37

$A_0 = [16; 34]$ PG fällt in Ablehnungsbereich von H_0. Wir können H_0 verwerfen und H_1 als statistisch sicher annehmen, auf einem SN von $\alpha = 0{,}01$.

p-value = $(1 - P(X \leq 36)) \cdot 2 = (1 - 0{,}9995) \cdot 2 = 0{,}001$

Man müsste also nur ein SN $\alpha \geq 0{,}001$ wählen, um H_0 zu verwerfen. Dies entspricht dann genau dem alpha-Fehler den wir dabei eingehen. Die Entscheidung H_0 zu verwerfen ist hier zu 99,9% sicher.

Arbeitsblatt 06: Hypothesentest mit π (einseitig)

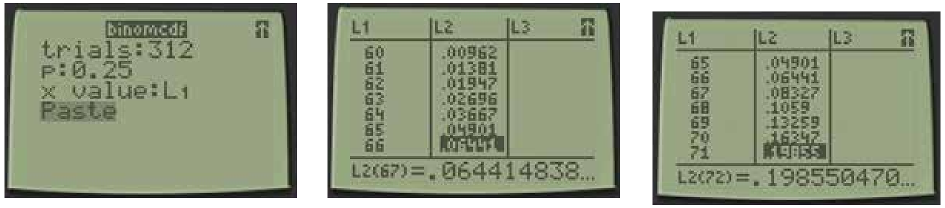
Aufgabe 1

Wir sollten die Nullhypothese so definieren, dass sie das Gegenteil zu dem ausdrückt, was wir absichern wollen. Wir müssen dann nämlich nur noch ein Signifikanzniveau α finden, das linksseitig einen Ablehnungsbereich ‚aufspannt', der groß genug ist, dass die Prüfgröße hineinfällt.

$H_0: \pi \geq 0{,}25$ $H_1: \pi < 0{,}25$

Da der Pfeil der H_1 nach links zeigt, handelt es sich um einen linksseitigen Test (dort liegt der Ablehnungsbereich von H_0).

Hierzu brauchen wir von der Wahrscheinlichkeitsfunktion $B_{312;0,25}$ die Verteilungsfunktion $F_{312;\,0,25}$



α **= 0,01**: A_0 = [61; 312] (Annahmebereich H_0) A_1 = [0; 60] (Ablehnungsbereich H_0)
α **= 0,05**: A_0 = [66; 312] A_1 = [0; 65]
α **= 0,1**: A_0 = [68; 312] A_1 = [0; 67]

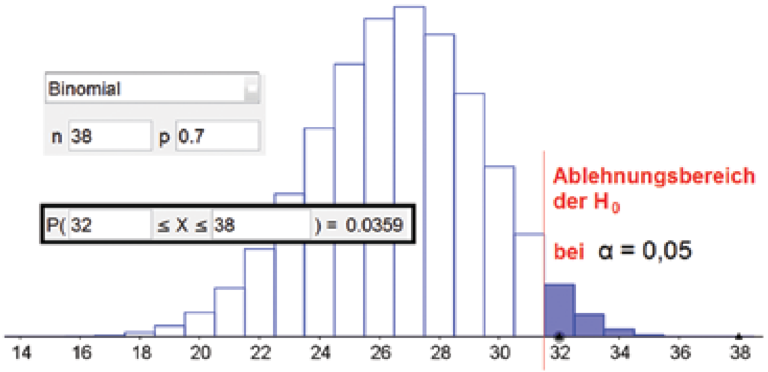
Die PG beträgt PG = 67. Diese fällt erst bei einem Signifikanzniveau von α = 0,1 in den Ablehnungsbereich der H_0. Die Nullhypothese lässt sich also erst bei α = 0,1 verwerfen und die H_1 statistisch absichern. p-value = 0,08327 – bedeutet, dass der α-Fehler beim Verwerfen der H_0 ca. 8,33% beträgt, also der Fehler, dass wir verwerfen, obwohl H_0 stimmt.

Aufgabe 2

Du möchtest ja zeigen, dass 70% aller Mädchen an deiner Schule keinen Unterkurs in Mathematik bekommen. Deshalb musst du diese Aussage nach Möglichkeit in die H_1 packen. Das Gegenteil bildet die Nullhypothese und wenn wir es schaffen, diese zu verwerfen, gilt H_1 als statistisch sicher mit einem α-Fehler, der dem Signifikanzniveau entspricht.

H_0: $\pi \le 0{,}7$ H_1: $\pi > 0{,}7$

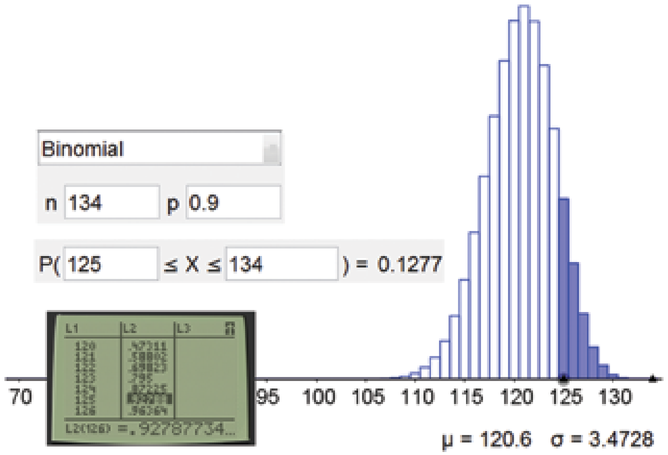
Da der Pfeil der H_1 nach rechts zeigt, handelt es sich um einen rechtsseitigen Test (dort liegt der Ablehnungsbereich von H_0). Der Ablehnungsbereich auf der rechten Seite der Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{38;\,0,7}$ darf also das Signifikanzniveau von α = 0,05 nicht überschreiten. Gesucht ist also das **k** von der Gleichung P(X ≥ **k**) ≤ 0,05.



Der Ablehnungsbereich ergibt sich also zu A_1 = [32; 38]. Du solltest also darauf hoffen, dass bei der nächsten Kursarbeit mindestens 32 Schülerinnen (Prüfgröße) keinen Unterkurs schreiben, denn nur dann fällt die PG in den Ablehnungsbereich. H_0 wird dann verworfen und H_1 gilt mit einem Vertrauen von 1 – α = 0,95 als statistisch sicher.
Selbstverständlich reicht auch ein Signifikanzniveau von 0,0359, damit A_1 = [32; 38] als Ablehnungsbereich tauglich ist. P(X ≥ 32) = 0,0359 entspricht dem p-Wert.

Aufgabe 3

a) rechtsseitiger Test mit p-value = 0,1277



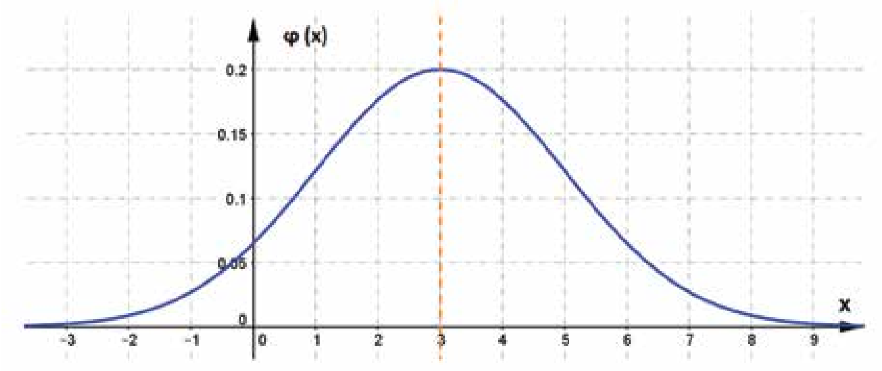
p-value = 0,1277 ; Das Signifikanzniveau müsste $\alpha \ge 0{,}1277$ gewählt werden, um die H_0 zu verwerfen. Die gängigen Niveaus reichen also nicht aus.

b) Hier ist nur der p-Wert gegeben, ohne dass wir wissen, worum es in der Hypothese eigentlich geht. Es ist auch unklar, ob es sich um einen links-, rechts- oder beidseitigen Hypothesentest handelt. Das Schöne am p-Wert ist, das man trotzdem alle Entscheidungen treffen kann, wenn dieser gegeben ist. α ≥ p-value würde dazu führen, dass die PG in den Ablehnungsbereich fällt und H_0 verworfen werden kann. Als gängiges Niveau ließe sich also α = 0,05 wählen, um die H_1 als statistisch sicher mit 95% Vertrauen anzunehmen.

c) Hier wird die PG mit 24 angegeben. Der Annahmebereich von H_0 bei α = 0,01 ist so groß, dass PG hineinfällt und wir annehmen müssen, dass H_0 tauglich ist. Der Ablehnungsbereich von H_0 (bzw. Annahmebereich von H_1) bei α = 0,05 beträgt [0; 21]. Dies reicht immer noch nicht aus, damit PG hineinfällt. Erst bei einem Signifikanzniveau von α = 0,1 schrumpft der Annahmebereich von H_0 bzw. wird der Ablehnungsbereich von H_0 groß genug, damit die PG hineinfällt. Wir können also auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ die Nullhypothese verwerfen und mit einer Sicherheit von 0,9 die H_1 als statistisch sicher betrachten. Über den p-Wert kann man keine Aussage treffen.

Arbeitsblatt 07: Gauss'sche Glockenfunktion

Aufgabe 1

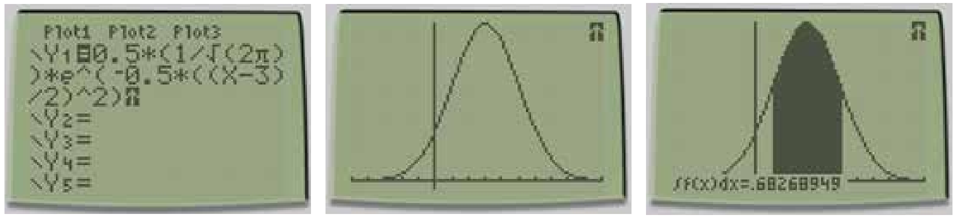


Hier soll eine Funktionsdiskussion allgemein für μ und σ durchgeführt werden. Damit wir uns an einem Beispiel orientieren können, wählen wir $\mu = 3$ und $\sigma = 2$. Daraus ergibt sich die Dichtefunktion $\varphi_{3;2}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$.

Für den Funktionsgraphen der Dichtefunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ gilt:

- Weist aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Exponentialfunktion keine Nullstellen auf.
- Symmetrie zur Geraden $x = \mu$ (hier orange gestrichelt eingezeichnet)
- Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ läuft der Graph gegen $y = 0$. Somit bildet die x-Achse eine Asymptote.
- Keinen Tiefpunkt. Hochpunkt bei $x_{max} = \mu$ und $y_{max} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$. In unserem Beispiel von oben also bei $x_{max} = 3$ und $y_{max} \approx 0{,}1995$.
- Besitzt zwei Wendepunkte an den Stellen $x_{w1} = \mu - \sigma$ und $x_{w2} = \mu + \sigma$. Also im obigen Beispiel gut erkennbar bei $x_{w1} = 1$ und $x_{w2} = 5$. Der entsprechende y-Wert ist für beide Wendestellen der Gleiche und liegt bei $y_w = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi e}}$. Somit in diesem Beispiel $y_w \approx 0{,}121$.
- Flächen: Gesamtfläche im Intervall $(-\infty; +\infty)$ beträgt 1.

Wir berechnen die Flächen anhand unseres Beispiels von oben mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$. Alle Überlegungen lassen sich auch auf Dichtefunktionen mit anderen μ- und σ-Werten beziehen:



$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi(x)\,dx = \int_{1}^{5} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx \approx 0{,}6827$$

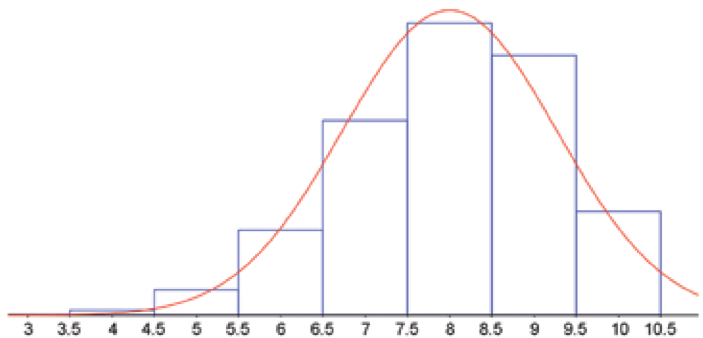
$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{7} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx \approx 0{,}9545$$

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \varphi(x)\,dx = \int_{-3}^{9} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx \approx 0{,}9973$$

Wir sehen, dass bereits im Intervall [-3 ; 9] fast die vollständige Fläche von 1 erreicht wird. Daher müssen wir kein weiteres Integral berechnen. Diese Überlegungen hast du bereits bei den Sigma-Regeln angestellt. Hier handelt es sich halt nur um eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung und daher um einen stetigen Graphen. Man muss Wahrscheinlichkeiten über Flächen berechnen.

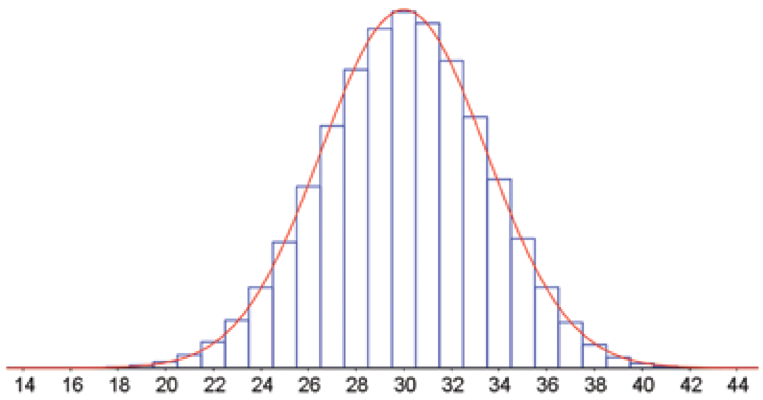
Aufgabe 2

a) $\mu = 8$ und $\sigma = 1{,}2649$



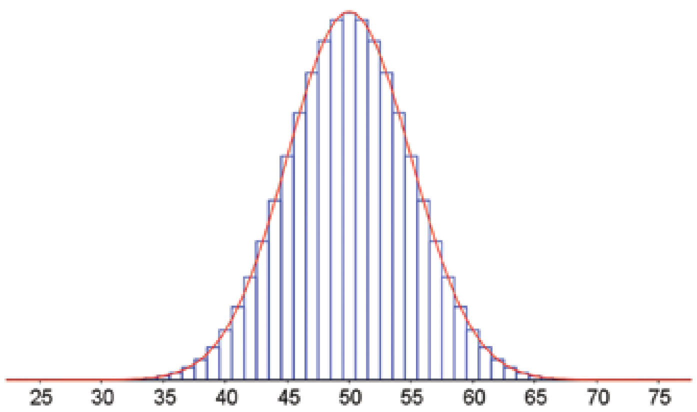
Approximation okay, Abweichungen hoch

b) $\mu = 30$ und $\sigma = 3{,}4641$



Approximation gut, Abweichungen gering

c) $\mu = 50$ und $\sigma = 5$



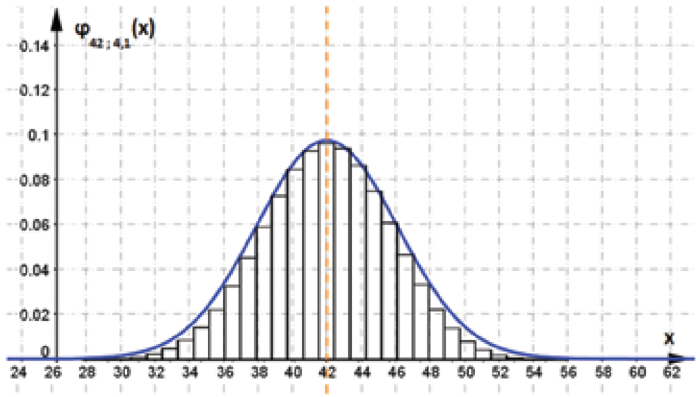
Approximation sehr gut, Abweichungen sehr gering

Je höher n und je näher π an 0,5 liegt, desto besser funktioniert die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung.

Man approximiert, weil es hinterher leichter fällt, Wahrscheinlichkeiten über Flächen zu berechnen und nicht über das Kumulieren von Rechtecken des Histogramms.

Aufgabe 3

Die Binomialverteilung $B_{70;0.6}$ lässt sich durch $\varphi_{42;4,1}(x)$ approximieren.



a) $P(X = 38) = 0{,}0596$ (exaktes Ergebnis mit Binomialverteilung)

$P(X = 38) = 0$, weil durch einen x-Wert keine Fläche aufgespannt wird.

0,06046 ist der Funktionswert der Dichtefunktion und kann als Schätzung verwendet werden (Schätzung mit Normalverteilung)

b) $P(X < 46) = P(X \leq 45) = 0{,}8027$ (exaktes Ergebnis mit Binomialverteilung)

$P(X < 46) = 0{,}8354$ (Schätzung mit Normalverteilung)

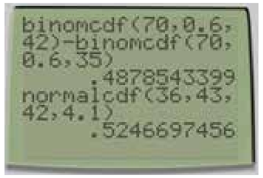
Hier nochmal der Hinweis. Bei diskreten Verteilungen ist es wichtig, auf das Zeichen zu achten: **<** führt zu einem anderen Intervall als **≤**. Bei stetigen Verteilungen spielt es keine Rolle, weil $P(X = 46) = 0$. Mehr Erklärungen dazu findest du im Video. Beim Befehl „normalcdf“ müssen Untergrenze und Obergrenze des Intervalls angegeben werden, für das die Fläche unter der Dichtefunktion berechnet werden soll. Eigentlich geht das Intervall von minus Unendlich bis 46. Hier wurde die Zahl „-20“ eingetragen, weil sie ausreichend klein ist. Links von -20 kommt keine nennenswerte Fläche mehr hinzu (eigentlich schon weit vorher, aber man geht auf Nummer sicher).

c) P(X ≤ 46) = 0,8643 (exaktes Ergebnis mit Binomialverteilung)
P(X ≤ 46) = P(X < 46) = 0,8354 (Schätzung mit Normalverteilung)

d) P(X > 40) = P(X ≥ 41) = 1 – P(X ≤ 40) = 0,6453 (Binomialvert.)
P(X > 40) = 0,6872 (Normalvert.)

e) P(X ≥ 40) = 1 – P(X ≤ 39) = 0,7306 (Binomialvert.)
P(X ≥ 40) = P(X > 40) = 0,6872 (Normalvert.)

f) P(36 ≤ X < 43) = P(X ≤ 42) – P(X ≤ 35) = 0,4879 (Binomialvert.)
P(36 ≤ X < 43) = 0,5247 (Normalvert.)
Hier zeigt sich schon, weshalb es angenehmer ist, Wahrscheinlichkeiten über Flächen zu berechnen.
Man kann gut erkennen, dass die Approximationen durchweg schlecht sind. Die Ergebnisse lassen sich aber durch eine Stetigkeitskorrektur verbessern. Die erkläre ich dir im nächsten Kapitel. Es wird einfach 0,5 zur Obergrenze dazu addiert und 0,5 von der Untergrenze abgezogen.
Beispiel: P(36 ≤ X ≤ 42) → P(35,5 ≤ X < 42,5) = 0,4921; Somit also eine deutliche Verbesserung der Schätzung.



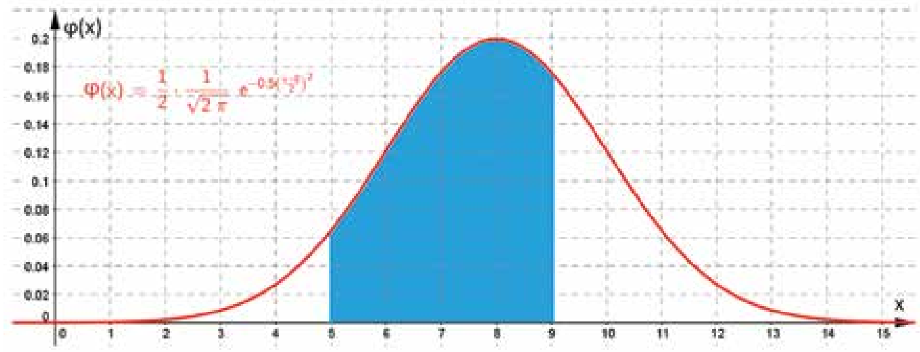
Aufgabe 4

$$\varphi_{10\,;\,5}(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-10}{5}\right)^2}$$

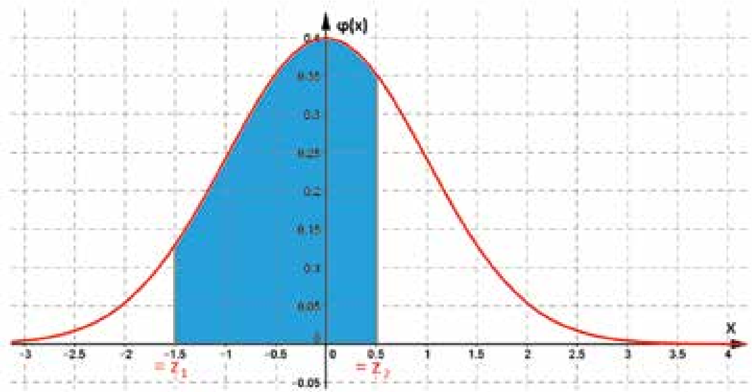
Arbeitsblatt 08: Normalverteilung

Aufgabe 1

a) und b) Schätzung: Die Fläche hat eine Länge von 4 Einheiten und eine ungefähre durchschnittliche Höhe von 0,14. Daher lässt sich P(5 ≤ X ≤ 9) auf ungefähr 0,56 schätzen.



c) Standardisieren: $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{5-8}{2} = -1{,}5$ und $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{9-8}{2} = 0{,}5$



$\Phi_{0\,;\,1}(z_2 = 0{,}5) - \Phi_{0\,;\,1}(z_1 = -1{,}5) \approx 0{,}6247$

$\Phi_{8\,;\,2}(x_2 = 9) - \Phi_{8\,;\,2}(x_1 = 5) \approx 0{,}6247$

Unsere Schätzung war also ziemlich gut.
Ohne Standardisierung ergibt sich natürlich das gleiche Ergebnis.

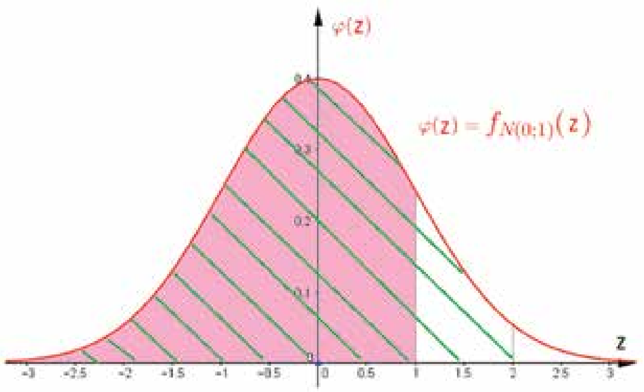
Teil 1 Teil 2 Teil 3 Teil 4

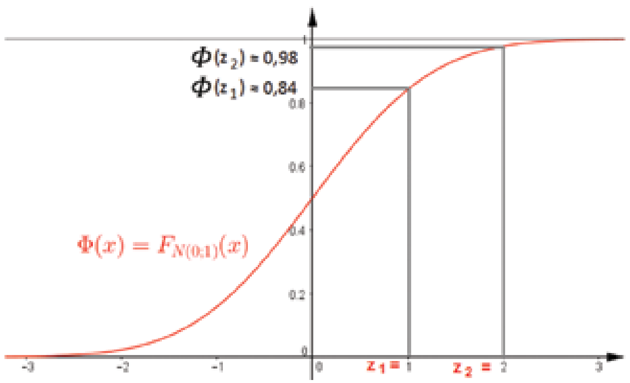
Aufgabe 2

P (...)	P(X < 120)	P(X ≤ 120)	P(110≤X≤130)	P(120<X<140)	P(X>132)
Binom	0,4576	0,5303	0,9454	0,4696	0,0091
Norm o. S.	0,5	0,5	0,9321	0,4999	0,0142
Norm m. S.	0,4636	0,5364	0,9448	0,4634	0,0112

Aufgabe 3

Wir brauchen die Fläche von minus unendlich bis z = 2 (hier grün schraffiert). Von dieser Fläche subtrahieren wir die rosa Fläche (minus unendlich bis zu z = 1). Das, was übrig bleibt, ist die Fläche zwischen z = 1 und z = 2.





Soll nun nur mit der Grafik die entsprechende Wahrscheinlichkeit zwischen z = 1 und z = 2 bestimmt werden, nehmen wir den Funktionswert der Verteilungsfunktion an der Stelle z_2 und subtrahieren dies vom Funktionswert an der Stelle z_1 : $P(1 \le z \le 2) = \Phi_{0;1}(2) - \Phi_{0;1}(1) = 0{,}98 - 0{,}84 = 0{,}14$
Das exakte Ergebnis liegt bei 0,1359.

Bitte helft uns dabei, dieses Lösungsheft weiter zu verbessern. Findet Ihr einen Fehler, dann schreibt uns eine Mail an

info@strandmathe.de

Autoren:
Conrad Zimmermann
Christian Hotop
Irina Schmidt
Alberto Gómez

StrandMathe - Meer für's Denken
Hotop & Zimmermann GbR
Grotestraße 13
30451 Hannover
www.strandmathe.de
info@strandmathe.de

StrandMathe
Meer fürs Denken

Unsere Hefte

ISBN 978-3-946641-01-8
9 783946 641018